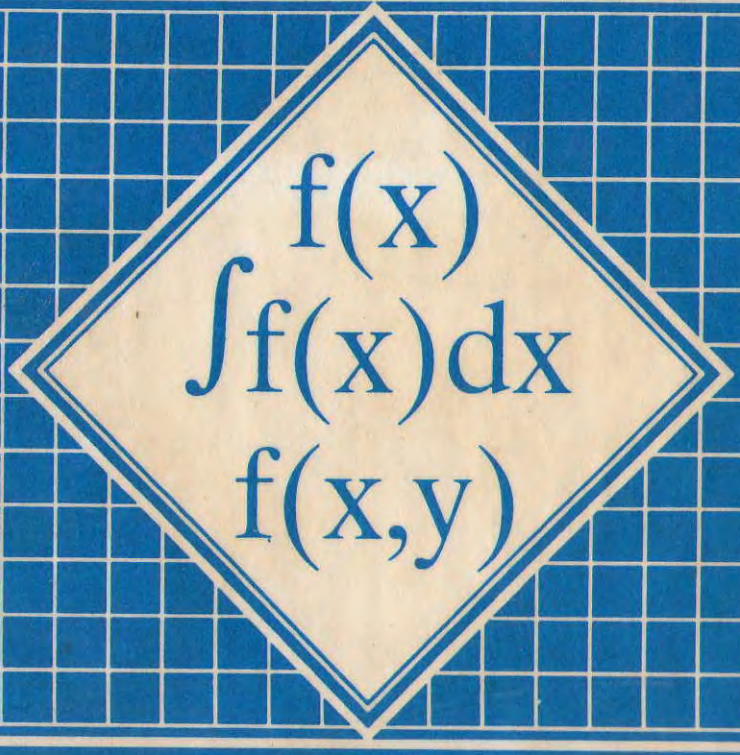
Ion C. Şcerbaţchi

ANALIZĂ MATEMATICĂ
(probleme)

1



Editura "Tehnica"
Chişinău 1998

1596 R. Descartes 1650

1601 P. Ferma 1665

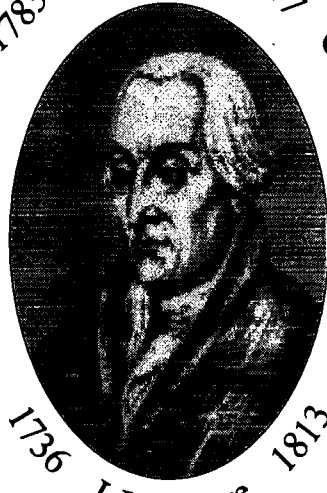
1643 I. Newton 1727

1646 G. Leibniz 1716

1685 B. Taylor 1731

1707 L. Euler 1783

1717 G. D'Alembert 1783



1736 J. Lagrange 1813

1749 P. Laplace 1827

1772 J. Fourier 1837

Ion C. Şcerbaţchi

ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Probleme)

Aprobată de Comisia de Experţi în Matematică a Ministerului Educaţiei şi Ştiinţei al Republicii Moldova

Universitatea Tehnică a Moldovei
Editura «Tehnica»
1998

CZU 517.9
Ş 32

Ion C. Şcerbaţchi, *"ANALIZĂ MATEMATICĂ", partea 1-a: manual pentru instituţiile de învăţământ superior cu profil tehnic, economic şi agrar; colegii şi licee.*
Editura "*Tehnica*", U.T.M., Chişinău, 1998. – 308 p.

Recenzenţi: Ion Pancenco, doctor, conferenţiar la catedra "Analiză matematică" a Universităţii de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău);
Valeriu Platon, doctor, conferenţiar, şef catedră "Matematici superioare şi mecanică teoretică" a Universităţii Agrare de Stat din Moldova.

Referent ştiinţific: Vladimir Dragan, doctor, conferenţiar la catedra "Matematică superioară – 1" a Universităţii Tehnice a Moldovei.

Redactor: Svetlana Dihor-Balaban.
Paginare computerizată: Valeriu Rusnac.
Prezentare grafică: Mihai Bacinschi.

Comanda nr. 644
F.E.P. "Tipografia Centrală"
MD-2068, Chişinău, str. Florilor 1
Departamentul Edituri Poligrafie
şi Comerţul cu Cărţi

ISBN 9975-910-40-8
© Ion C. Şcerbaţchi, 1998

Prefață

Această lucrare este destinată în primul rând studenților instituțiilor superioare de învățământ cu profil tehnic, economic și agrar. De asemenea poate fi utilă atât profesorilor și studenților colegiilor tehnice, cât și liceenilor din clasele superioare.

Lucrarea conține două părți. Partea întâi este o ediție îngrijită și completată a lucrării autorului *"Culegere de probleme de analiză matematică"* [40]. Ea conține următoarele compartimente ale analizei matematice: introducere în analiza matematică; calculul diferențial al funcției de o singură variabilă; numere complexe, polinoame și funcții raționale; calculul integral al funcției de o singură variabilă reală și calculul diferențial al funcției de mai multe variabile reale. Primele patru capitole corespund programelor de matematică pentru licee (cl. X-XII) și colegii tehnice, iar volumul în întregime corespunde programei cursului "Matematică superioară" pentru studenții anului întâi de învățământ ai instituțiilor superioare tehnice.

În partea a doua sunt incluse acele capitole ale cursului "Matematică superioară", care, de obicei, corespund programei anului doi de învățământ în instituțiile superioare, precum: ecuații diferențiale; serii numerice, funcționale și Fourier; calculul integral al funcției de mai multe variabile reale; elemente din teoria funcțiilor de o variabilă complexă și calculul operațional.

Aceste două părți conțin zece capitole și o anexă. La începutul fiecărui paragraf al capitolului sunt prezentate sumar noțiunile fundamentale, precum și rezultatele teoretice, ce urmează a fi aplicate la rezolvarea problemelor. Sunt propuse modele de probleme complet rezolvate. O atenție deosebită este acordată exercițiilor și problemelor propuse spre rezolvare: unele asemănătoare cu cele rezolvate, altele însă fiind o continuare ale acestora.

În anexa din prima parte sunt incluse 5 lucrări de control ce corespund materialului acestei părți. În anexa din partea a doua sunt incluse 5 lucrări de control în corespundere cu materialul prezentat în fiecare capitol. Lucrările de control pot fi propuse atât studenților cu învățământ de zi, cât și celor de la fără frecvență. La

sfârşitul fiecărei părţi pot fi găsite răspunsurile la problemele propuse spre rezolvare. Răspunsurile problemelor mai dificile sunt însoţite de indicaţiile respective.

În încheiere aduc sincere mulţumiri recenzenţilor dr. conf. Ion Pancenco de la Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chişinău) şi dr. conf. Valeriu Platon de la Universitatea Agrară de Stat din Moldova; referentului ştiinţific dr. conf. Vladimir Drăgan de la Universitatea Tehnică a Moldovei şi dr. conf. Ion Goian de la Universitatea de Stat din Moldova ale căror observaţii şi sugestii mi-au fost deosebit de utile. De asemenea sunt profund recunoscător colegilor mei de la catedrele "Matematică superioară – 1" a Universităţii Tehnice a Moldovei şi "Matematică şi econometrie" (şef catedră dr. hab. Ion Bunu) a Academiei de Studii Economice a Moldovei, care m-au încurajat pe parcursul elaborării acestei lucrări. Mulţumesc mult studenţilor mei (a. u. 1997-1998) şi foştilor mei studenţi V. Mileţchi, V. Şavanov şi V. Ţuţuc, care au contribuit activ la apariţia acestei lucrări.

Autorul

Capitolul 1

INTRODUCERE ÎN ANALIZA MATEMATICĂ

§1. Funcţie reală de o variabilă reală

Fie D şi V două submulţimi ale mulţimii numerelor reale R. Dacă printr-un procedeu oarecare f facem să corespundă fiecărei valori a variabilei x din D o valoare unică a variabilei y din V, atunci putem afirma că am definit *o funcţie reală de o variabilă reală pe D cu valori în V.* Se notează astfel: $y=f(x)$, $x \in D$ ori $f: D \to V$. Variabila x se numeşte *argumentul funcţiei*, variabila y – *funcţie*; D – *domeniul de definiţie* (existenţă), iar V – *domeniul în care funcţia ia valori.*

Dacă prin operaţia f unui element x_0 din D îi corespunde elementul y_0 din V, atunci spunem că y_0 este valoarea funcţiei în punctul x_0 şi se notează astfel: $y_0=f(x_0)$.

Una din cele mai răspândite metode de definire a funcţiei este metoda analitică: cu ajutorul unei formule se stabileşte algoritmul (procedeul f) calculării valorilor funcţiei y după valorile argumentului x. În cazul acesta domeniul D de definiţie al funcţiei coincide cu domeniul natural de definiţie al expresiei analitice respective. Funcţia $y=f(x)$ se numeşte *crescătoare (descrescătoare)*, dacă valorii mai mari a argumentului îi corespunde o valoare mai mare (mică) a funcţiei. Funcţiile crescătoare şi descrescătoare se numesc monotone. Funcţia $y=f(x)$ se numeşte *mărginită* în domeniul D, dacă există un astfel de număr $M>0$, încât se verifică inegalitatea $|f(x)| \leq M$ pentru orice x din D. Se spune că $f: D \to V$ este *surjecţie*, dacă pentru orice element $y \in V$ există cel puţin un element $x \in D$ astfel încât $y=f(x)$. Dacă pentru $f(x_1) \neq f(x_2)$ avem $x_1 \neq x_2$, funcţia $y=f(x)$ se numeşte injecţie. O funcţie care este în acelaşi timp injecţie şi surjecţie se numeşte *bijecţie* sau *funcţie biunivocă.*

Fie $f: D \to V$ biunivocă. Atunci oricărei valori a variabilei y din V i se asociază o singură valoare a variabilei x din D astfel încât $y=f(x)$. În acest caz este definită funcţia $x=g(y)$, care se numeşte *inversă* funcţiei date. Se notează $x=f^{-1}(y)$. O condiţie suficientă de existenţă a funcţiei inverse este ca funcţia directă $y=f(x)$ să fie monotonă. Dacă $y=f(x)$ este strict crescătoare (descrescătoare), apoi şi inversa ei este strict crescătoare (descrescătoare). Observăm că

funcţiile $y=f(x)$ şi $x=f^{-1}(y)$ au acelaşi grafic. Dacă însă trecem la notaţia standard, adică $y=f^{-1}(x)$, atunci graficele acestor două funcţii sunt simetrice în raport cu bisectoarea primului şi al treilea cadran $(y=x)$.

Două funcţii $f:D_1\to V_1$ şi $g:D_2\to V_2$ se numesc *egale (identice)*, dacă $D_1=D_2$, $V_1=V_2$ şi dacă stabilesc aceeaşi corespondenţă $f(x)=g(x)$ pentru orice $x\in D_1$.

Funcţia $y=f(x)$ se numeşte *pară*, dacă pentru orice x din D avem $(-x)\in D$ şi $f(-x)=f(x)$. Evident că graficul funcţiei pare este simetric faţă de axa OY. Funcţia $y=f(x)$ se numeşte *impară*, dacă pentru orice x din D, avem că $(-x)\in D$ şi $f(-x)=-f(x)$. Graficul unei funcţii impare este simetric în raport cu originea sistemului de coordonate.

Fie $f:D\to V$ şi $g:V\to W$. Funcţia $h=g\circ f:D\to W$ se numeşte *compusă*. Se mai notează şi astfel: $h=g(f(x))$, $x\in D$.

Funcţia $y=f(x)$ se numeşte *periodică*, dacă există un număr $T>0$ astfel încât $f(x+T)=f(x)$ pentru orice x, $(x\pm T)$ din D. Dacă există cel mai mic număr T cu o astfel de proprietate, el se numeşte *perioada funcţiei* $y=f(x)$ [16].

Probleme rezolvate

1. Fie $f(x)=\lg x^4$. Să se calculeze $f(-1)$, $f(-0,01)$, $f(100)$.
   Rezolvare. $f(-1)=\lg(-1)^4=\lg 1=0$, $f(-0,01)=\lg(-0,01)^4=$
   $=\lg(0,01)^4=\lg 10^{-8}=-8$, $f(100)=\lg 100^4=\lg 10^8=8$.

2. Fie $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$. Să se arate că $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1+x_2}\right)$, $x\in]-1,1[$.

   Rezolvare. Dacă $x_1, x_2\in]-1,1[$, atunci $\dfrac{1-x}{1+x}>0$. Deci

$$f(x_1)+f(x_2)=\ln\frac{1-x_1}{1+x_1}+\ln\frac{1-x_2}{1+x_2}=\ln\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)} \text{ şi } f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)=$$

$$\ln\frac{1-\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}=\ln\frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}=\ln\frac{(1-x_1)-x_2(1-x_1)}{(1+x_1)+x_2(1+x_1)}=$$

$$=\ln\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$ Prin urmare, $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$.

3. Să se afle domeniul de definiție al funcțiilor

a) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$, b) $y=\arccos\frac{3}{4+2\sin x}$.

Rezolvare.

a) Funcția este definită, dacă $|x|-x>0$. Inegalitatea este valabilă, dacă $x<0$. Deci domeniul de definiție al funcției este intervalul $]-\infty, 0[$.

b) $y=arccos\frac{3}{4+2\sin x}$ sau $\cos y=\frac{3}{4+2\sin x}$. Deci $-1\le\frac{3}{4+2\sin x}\le 1$. Deoarece $4+2sinx>0$, rezultă că $\frac{3}{4+2\sin x}\le 1$, de unde $3\le 4+2\sin x$ sau $\sin x\ge-\frac{1}{2}$. Rezolvând această inecuație, obținem $-\frac{\pi}{6}+2\pi k\le x\le\frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $k=0,\pm1,\ldots$.

4. Fie $f(x)$ definită pe $[0, 1]$. Să se afle domeniul de definiție al funcțiilor $f\left(\frac{x^2}{4}\right)$, $f(x+1)$, $f(\mathrm{tg}x)$.

Rezolvare. Funcțiile $f\left(\frac{x^2}{4}\right)$, $f(x+1)$ și $f(\mathrm{tg}x)$ sunt compuse.

a) Considerăm funcția $u=\frac{x^2}{4}$. Deci $f\left(\frac{x^2}{4}\right)=f(u)$ cu $0\le u\le 1$, adică $0\le\frac{x^2}{4}\le 1\Rightarrow x^2\le 4\Rightarrow|x|\le 2\Rightarrow x\in[-2,2]$.

b) În mod analog $u=x+1$. Deci $f(x+1)=f(u)$ cu
$0\le u\le 1\Rightarrow 0\le x+1\le 1\Rightarrow x\in[-1,0]$.

c) $f(\mathrm{tg}x)=f(u)$ cu $u=\mathrm{tg}x$, adică

$$0 \le u \le 1 \Rightarrow 0 \le tgx \le 1 \Rightarrow \pi k \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots .$$

5. Să se calculeze $f(x) = \frac{49}{x^2} + x^2$, dacă argumentul x satisface ecuația $\frac{7}{x} + x = 6$.

Rezolvare.

$$f(x) = \frac{49}{x^2} + x^2 = \left(\frac{7}{x} + x\right)^2 - 14 = 6^2 - 14 = 36 - 14 = 22.$$

6. Să se rezolve ecuația $arctg\sqrt{x(x+1)} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$.

Rezolvare. Cercetăm mai întâi domeniul de definiție al expresiei analitice. Deci $\begin{cases} x(x+1) \ge 0 \\ 0 \le x^2 + x + 1 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x \ge 0 \\ -1 \le x^2 + x \le 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=0$ şi $x_2=-1$. Prin urmare, ecuația are sens numai pentru două valori ale necunoscutei x: $x_1=0$ şi $x_2=-1$. Observăm că ambele valori satisfac ecuația dată.

Notă. Metoda aceasta poate fi folosită şi la rezolvarea inecuațiilor.

7. Să se afle funcția $f(x)$, dacă $f(x+1)=x^2+3x-2$.

Rezolvare. Notăm $x+1=t$, de unde $x=t-1$ şi $f(x+1)=f(t)=$ $=(t-1)^2+3(t-1)-2=t^2-2t+1+3t-3-2=t^2+t-4$. Prin urmare, $f(x)=x^2+x-4$.

8. Să se demonstreze că funcția $y=|cosx|$ este periodică şi să se afle perioada ei.

Rezolvare. Într-adevăr $y=|cosx| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$.

Funcția $u=cos2x$ este periodică cu perioada $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Deci şi funcția inițială este periodică cu perioada $T=\pi$.

9. Să se demonstreze că funcția $y=cosx^3$ nu este periodică.

Rezolvare. Domeniul de definiție al funcției $y=cosx^3$ este R. Presupunem că $y=cosx^3$ este periodică. Aceasta înseamnă că există un număr $T>0$ astfel încât $cos(x+T)^3=cosx^3$, $\forall x \in R$, de unde $(x+T)^3 \pm x^3 = 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \ldots$. Identitatea aceasta nu este adevărată: în partea dreaptă avem un număr constant ($k=0, \pm 1, \ldots$), iar în

partea stângă avem o funcție pătratică sau cubică de un argument continuu $(x \in R)$. Prin urmare, funcția dată nu este periodică.

10. Să se demonstreze că funcția lui Dirichlet este periodică, însă nu are perioadă.

Rezolvare.

Fie $y = D(x) = \begin{cases} 1, \text{ daca x este un numar rational} (x \in Q) \\ 0, \text{ daca x este un numar irational } (x \in I) \end{cases}$. Din teoria numerelor reale se știe că dacă T este un număr rațional $(T \in Q)$, apoi $(x+T) \in Q$, dacă $x \in Q$ și $(x+T) \in I$, dacă x este un număr irațional $(x \in I)$.

Fie $T>0$ și $T \in Q$. Atunci $D(x+T) = \begin{cases} 1, \text{ daca } x \text{ rațional} \\ 0, \text{ daca } x \text{ irațional} \end{cases}$. Prin urmare, $D(x)=D(x+T)$. Întrucât nu există cel mai mic număr pozitiv și rațional, funcția $D(x)$ nu are perioadă.

Notă. Dacă $T>0$, $T \in I$, atunci $D(x+T)=0$, $\forall x \in Q$ și, prin urmare, $D(x+T) \neq D(x)$. Constatăm că este imposibil de a reprezenta grafic *funcția Dirichlet.*

11. Să se afle funcțiile inverse funcției $y=x^2-x+1$.

Rezolvare. Observăm că $y = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$ este monoton crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$ și monoton descrescătoare pe $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$, având ca domeniu de valori intervalul $\left[\frac{3}{4}, +\infty \right[$. Prin urmare, această funcție are două funcții inverse, care se obțin rezolvând ecuația $x^2-x+(1-y)=0$ în raport cu x.

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1-y)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4y-3}$. Deci funcțiile inverse sunt

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4y-3}$ cu valorile din intervalul $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$ şi $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4y-3}$ cu valorile din intervalul $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

12. Fie $y=E(x)$ partea întreagă a lui x, definită pe $[0, +\infty[$. Să se arate că funcţia $f(x)=x+E(x)$, $x \in [0, +\infty[$, se poate inversa şi să se determine inversa ei.

Rezolvare. Fie $y = E(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [0,1[\\ 1, \text{ dacă } x \in [1,2[\\ \quad \ldots \quad \ldots \\ n, \text{ dacă } x \in [n, n+1[\end{cases}$

definită pe $[0, +\infty[$.

Deci $u = f(x) = x + E(x) = \begin{cases} x+0, \text{ dacă } x \in [0,1[, \\ x+1, \text{ dacă } x \in [1,2[, \\ \quad \ldots \quad \ldots \\ x+n, \text{ dacă } x \in [n, n+1[\\ \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$.

Funcţia $f(x)$ este strict crescătoare pe intervalele $[n, n+1[$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Deci, există funcţia inversă $f^{-1}(x)$. Funcţia inversă se obţine rezolvând ecuaţia $u=x+E(x)$ în raport cu x.

Pentru $x \in [n, n+1[$, $n=0, 1, 2, \ldots$ avem $u=x+n$ cu $u \in [2n, 2n+1[$, de unde $x=u-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Trecând la notaţiile standard, avem $f^{-1}(x)=x-n$, $x \in [2n, 2n+1[$, $n=0, 1, \ldots$.

Probleme propuse spre rezolvare

1.1. Să se calculeze $f(-1)$, $f(a+1)$, $f(a)+1$, dacă $f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$.

1.2. Fie $f(x)=x^3-1$. Să se calculeze $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(b\neq a)$,

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)+1$.

1.3. Fie $f(x)=\begin{cases} 2x^3+1, x\le 2 \\ \frac{1}{x-2}, 2<x\le 3 \\ 2x-5, x>3 \end{cases}$. Să se calculeze $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(\sqrt{8}\right)$,

$f\left(\log_2 32\right)$.

1.4. Funcția $y=f(n)$ se definește astfel: fiecărui număr natural n i se asociază zecimala respectivă din descompunerea numărului irațional $\sqrt{3}$ în fracție zecimală infinită. Să se afle $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

1.5. Să se determine funcția $f(x)=ax^2+bx+c$, care satisface condițiilor $f(0)=1, f(1)=6$ și $f(-1)=0$.

1.6. Să se afle $f(\varphi(x))$ și $\varphi(f(x))$, dacă

a) $f(x)=x^3$ și $\varphi(x)=\sin x$; b) $f(x)=2^x$ și $\varphi(x)=x^5$.

1.7. Să se afle $f(x)$, dacă:

a) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}, x\neq 0$; b) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}, x>0$;

c) $f(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$; d) $f(x-1)=3x^2-4x+2$;

e) $f(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$.

1.8. Să se arate că funcția $y=f(x)$ satisface identitatea:

a) $f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)f(x_2)$, dacă $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$, $a>0, a\neq 1$;

b) $f(x)+f(x+1)=f(x(x+1))$, dacă $f(x)=\lg x$, $x>0$;

c) $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=0$, dacă $f(x)=2x+1$;

d) $f(x)f(y)=f(x+y)$, dacă $f(x)=e^x$.

e) $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, dacă $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

1.9. Să se afle domeniul de definiție al funcțiilor:

a) $y=\ln(1-\cos x)$, b) $y=\sqrt{1-|x|}$,

c) $y = \arccos\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$, d) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+5x+6}$,

e) $y = \sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$, f) $y = \arcsin\frac{x-2}{2} - \ln(4-x)$,

g) $y = \lg\cos x$, h) $y = \frac{1}{x} + 2^{\arcsin x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$,

i) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$, j) $y = \sqrt{\arccos(\log_2 x)}$,

k) $y = 1 + \sqrt{\cos x} + \sqrt{-\cos x}$, l) $y = \ln x^4$.

1.10. Să se rezolve ecuațiile (inecuațiile):

a) $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3+x^2} = 2$, b) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} \geq \sqrt{5-x}$,

c) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}} = \frac{3}{2}$, d) $\log_{(2-x)}(x-3) \geq -5$,

e) $\sqrt{1-9x^2} + 2\sqrt{\arccos(\log_3 x)} = 3$,

f) $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{4} \geq 2^{1-x} + \sqrt{(1-x)(x+2)}$,

g) $\sqrt[4]{1-2^{5x-1}} + \sqrt[4]{2\arccos(\log_4 x)} > 1$.

1.11. Să se afle domeniul valorilor funcției

a) $f(x) = |x| + 2$, b) $f(x) = 3 + 2\cos x$,

c) $f(x) = \sqrt{49-x^2}$, d) $f(x) = 4^{-x^2}$,

e) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$, f) $f(x) = \frac{4}{x-1}$,

g) $f(x) = \lg(4 - 2x - x^2)$, h) $f(x) = \frac{1}{2-\cos 3x}$.

1.12. Să se analizeze când funcțiile date sunt identice:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ și $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, b) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ și $\varphi(x) = x$,

c) $f(x) = x$ și $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$, d) $f(x) = \ln x^2$ și $\varphi(x) = 2\ln x$.

1.13. Să se calculeze $f(x)$, dacă

a) $f(x) = x^2 + \frac{9}{x^2}$ și x satisface ecuația $\frac{3}{x} - x = 2$,

b) $f(x)=x^4+\frac{1}{x^4}$ şi x satisface ecuaţia $\frac{1}{x}+x=3$.

1.14. Funcţia $f(x)$ este definită pe [0, 1]. Care este domeniul de definiţie al funcţiilor $f(\sin x)$ şi $f(2x+3)$?

1.15. Să se studieze dacă funcţiile date sunt: pare, impare sau nici pare, nici impare:

a) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$, b) $f(x)=\sin x-\cos x$,

c) $f(x)=const.$, d) $f(x)=1+2x^2+\cos^2 x$,

e) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, f) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

1.16. Să se descompună următoarele funcţii într-o sumă algebrică a două funcţii: una să fie pară, iar cealaltă – impară.

a) $y=x^2+3x+2$, b) $y=1-x^3-x^4-2x^5$,

c) $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}+\operatorname{tg}x$, d) $y=e^x$.

1.17. Să se demonstreze că:

a) funcţia $[f(x)+f(-x)]$ este pară, iar funcţia $[f(x)-f(-x)]$ este impară pentru orice funcţie $y=f(x)$, cu domeniul de definiţie simetric în raport cu originea;

b) produsul (câtul) a două funcţii pare (impare) este o funcţie pară;

c) produsul unei funcţii pare la o funcţie impară este o funcţie impară.

1.18. Fie $f(x)=x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$. Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$.

1.19. Să se demonstreze că $f(3x)=3f(x)-4[f(x)]^3$, dacă $f(x)=\sin x$.

1.20. Fie $f(x)=\ln\cos x$. Să se demonstreze că $f(a)+f(b)=\ln(\cos a\cdot\cos b)$, pentru valorile admisibile ale lui a şi b.

1.21. Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$, dacă

$$f(x)=2x^2+\frac{2}{x^2}+5x+\frac{5}{x},\ x\neq 0.$$

1.22. Să se afle funcţiile inverse funcţiei:

a) $y=ax+b$, b) $y=x^2-1$, c) $y=5^{\lg x}$, d) $y=\ln 2x$.

1.23. Să se demonstreze că inversa funcției $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ coincide cu însăşi funcția.

1.24. Să se afle dacă funcţiile sunt periodice şi să se afle perioada lor:

a) $f(x)=\sin^2 2x$, b) $f(x)=x\cos x$, c) $f(x)=\cos 2\pi x$,

d) $f(x)=\sin x+\cos\sqrt{2}x$, e) $y=\cos\sqrt{x}$, f) $y=4\sin\dfrac{x-\pi}{3}$.

1.25. Să se demonstreze că dacă funcţiile $u(x)$ şi $v(x)$ sunt periodice cu una şi aceeaşi perioadă T, atunci funcţiile $u(x)\cdot v(x)$, $u(x)\pm v(x)$ şi $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ sunt periodice cu perioada T.

§2. Şiruri numerice

Fie funcţia $f:D\to V$. Dacă domeniul D coincide cu mulţimea numerelor naturale, atunci $y=f(x)$, $x\in N$, se scrie $f(n)$ sau y_n şi se numeşte *şir numeric*. Termenul y_n se numeşte *termenul general* al şirului respectiv. Vom nota termenii generali prin literele: x_n, y_n, u_n, v_n etc., iar şirurile respective - $\{x_n\}$, $\{z_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ etc.

Dacă funcţia $y_n=f(n)$, $n\in N$, este mărginită, şirul respectiv $\{y_n\}$ se numeşte *mărginit*. Şirul $\{y_n\}$ se numeşte *monoton*, dacă funcţia $y_n=f(n)$ este monotonă.

Numărul a se numeşte *limita* şirului $\{y_n\}$ cînd $n\to\infty$, dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât inegalitatea $n>N(\varepsilon)$ implică inegalitatea $|y_n-a|<\varepsilon$. Se notează $a=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ sau $y_n\to a$ când $n\to\infty$. Dacă şirul are limită finită cînd $n\to\infty$, atunci el se numeşte *convergent*. Un şir care nu este convergent se numeşte şir *divergent*.

Se spune că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, dacă pentru orice număr $M>0$ există un număr natural $N(M)$ astfel încât pentru $n>N(M)$ se verifică inegalitatea $|y_n|>M$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, atunci şirul $\{y_n\}$ se numeşte ***infinit mic***. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, atunci şirul $\{y_n\}$ se numeşte *infinit mare*.

Fie $\{y_n\}$ un şir şi $n_1<n_2<...<n_k<...$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $y_{n_1}, y_{n_2}, ..., y_{n_k}, ...$ se numeşte *subşir* al şirului $\{y_n\}$.

Remarcăm următoarele proprietăţi ale şirurilor numerice:

1. Dacă şirul are limită, atunci ea este unică.
2. Dacă şirul are limită finită, atunci el este mărginit.
3. Dacă $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, $\lim_{n\to\infty} v_n = b$, $a, b \in R$, atunci

   a) $\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = a \pm b$; b) $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$;

   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}; (v_n \neq 0, n \in N, b \neq 0)$

   d) $a = \lim_{n\to\infty} u_n \Leftrightarrow u_n = a + \alpha_n$ cu $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.
4. Şirul (u_n), $u_n \neq 0$ este infinit mic, atunci şi numai atunci când şirul $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$ este infinit mare;
5. Produsul unui şir infinit mic cu un şir mărginit este un şir infinit mic.
6. Dacă $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ şi începând cu un rang n, $u_n \geq c$, atunci $a \geq c$ $(a \in R)$.
7. Dacă $\lim_{n\to\infty} u_n = a, \lim_{n\to\infty} v_n = b$ şi începând cu un rang n, $u_n \geq v_n$, atunci $a \geq b$ $(a, b \in R)$.
8. Fie (u_n), (v_n) şi (y_n) trei şiruri astfel încât $u_n \leq y_n \leq v_n$ pentru orice $n \in N$ şi $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = a$, atunci $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ $(a \in R)$.
9. Orice şir monoton şi mărginit are limită finită.
10. Dacă şirul $\{y_n\}$ are limită finită c, atunci:

    a) şirul $\{|y_n|\}$, are limită finită şi $\lim_{n\to\infty} |y_n|^\alpha = |c|^\alpha$, $\alpha \in R$;

    b) şirul $\log_a\{|y_n|\}$, $a>0$, $a\neq 1$, $y_n \neq 0$ are limită şi $\lim_{n\to\infty}(\log_a |y_n|) = \log_a |c|$, $c \neq 0$;

    c) şirul $\{a^{y_n}\}, a > 0, a \neq 1$ are limită finită şi $\lim_{n\to\infty}(a^{y_n}) = a^c$.

11. Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi au aceeaşi limită.

Cu ajutorul proprietăţilor 9 şi 10 se poate demonstra că:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, cu $2<e<3$ (vezi [1], [6]).

Notă. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left|\begin{matrix}\frac{1}{n}=y_n\\ y_n\to 0\end{matrix}\right| = \lim\limits_{y_n\to 0}\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}} = e.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log_a\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] =$

$= \log_a e = \frac{1}{\ln a}$. Se poate demonstra şi altfel:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \left|\begin{matrix}\frac{1}{n}=y_n\\ n\to\infty\\ y_n\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a\left(1+y_n\right)}{y_n} = \frac{1}{\ln a}.$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \left|\begin{matrix}a^{\frac{1}{n}}-1=y_n\\ a^{\frac{1}{n}}=y_n+1\\ \frac{1}{n}=\log_a\left(1+y_n\right)\\ n\to\infty, y_n\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{y_n\to 0}\frac{y_n}{\log_a\left(1+y_n\right)} =$$

$$= \lim_{y_n\to 0}\frac{1}{\left[\frac{\log_a\left(1+y_n\right)}{y_n}\right]} = \ln a.$$

Probleme rezolvate

1. Aplicând definiţia limitei şirului numeric, să se verifice dacă:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}=0.$

Rezolvare.

a) Conform definiției limitei unui șir, trebuie să arătăm că pentru orice număr $\varepsilon>0$ se poate determina un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât inegalitatea $n>N(\varepsilon)$ implică inegalitatea

$$\left|\frac{2n+1}{2n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{6n+3-6n-2}{3(3n+1)}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3(3n+1)}<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n+1>\frac{1}{3\varepsilon} \Leftrightarrow n>\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}.$$

Considerăm $N(\varepsilon)=\begin{cases}1, \text{ dacă } E\left(\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\right)<2\\ E\left(\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\right), \text{ dacă } E\left(\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\right)\geq 2,\end{cases}$ unde

$E\left(\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\right)$ este partea întreagă a numărului real $\left(\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\right)$. De aici rezultă că $n>N(\varepsilon)$ implică $\left|\frac{2n+1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}$.

b) Fiind dat $\varepsilon>0$, va trebui să aflăm numărul natural $N(\varepsilon)$ astfel încât $n>N(\varepsilon)$ implică $\left|\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}\right|<\varepsilon$. Dar $\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}<\frac{2^n+2^n}{3^n}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ și dacă $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n<\varepsilon$, obținem

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow n>\log_{\frac{2}{3}}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\lg\frac{\varepsilon}{2}}{\lg\frac{2}{3}}=A.$$

Considerând $N(\varepsilon)=\begin{cases}1, \text{dacă } E(A)<2\\ E(A), \text{dacă } E(A)\geq 2,\end{cases}$ unde *E(A)* este partea întreagă a numărului real $\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{2}}{\lg\frac{2}{3}}$, obținem $\left|\dfrac{2^n+(-2)^n}{3^n}\right|<\varepsilon$ pentru $n>N(\varepsilon)$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-2)^n}{3^n}=0.$

2. Să se demonstreze că șirul cu termenul general $y_n=\dfrac{3^n+(-3)^n}{3^n}$ nu este convergent.

Rezolvare. Să observăm că pentru *n* par, avem $y_n=2$ și pentru *n* impar, avem $y_n=0$, adică am obținut două subșiruri convergente cu limite diferite. Dacă $\{y_n\}$ ar fi convergent la numărul *a*, atunci cele două șiruri menționate de asemenea ar trebui să tindă către numărul *a* (proprietatea 11). Datorită unicității limitei unui șir convergent, ar trebui ca numărul *a* să fie egal cu *0* și cu *2*. Acest lucru este imposibil. Deci șirul $\{y_n\}$ este divergent.

3. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$y_n=\frac{b_0+b_1n+b_2n^2+\ldots+b_kn^k}{a_0+a_1n+a_2n^2+\ldots+a_mn^m},\quad b_k\neq 0,\quad a_m\neq 0.$$

Rezolvare. Putem scrie $y_n=\dfrac{n^k\left(\frac{b_0}{n^k}+\frac{b_1}{n^{k-1}}+\ldots+b_k\right)}{n^m\left(\frac{a_0}{n^m}+\frac{a_1}{n^{m-1}}+\ldots+\frac{a_m}{1}\right)}.$

a) Fie $k=m$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_0}{n^k}+\frac{b_1}{n^{k-1}}+\ldots+b_k}{\frac{a_0}{n^k}+\frac{a_1}{n^{k-1}}+\ldots+a_k}=\frac{0+0+\ldots+b_k}{0+0+\ldots+a_k}=\frac{b_k}{a_k}.$$

b) Fie $k<m$, atunci $m-k>0$ și

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m-k}} \cdot \frac{\frac{b_0}{n^k} + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \ldots + b_k}{\frac{a_0}{n^m} + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \ldots + a_m} = \left(\frac{1}{\infty} \cdot \frac{0+0+\ldots+b_k}{0+0+\ldots+a_m} \right) =$$

$$= 0 \cdot \frac{b_k}{a_m} = 0.$$

c) Fie $k>m$, atunci $k-m>0$ şi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n^{k-m} \cdot \frac{\frac{b_0}{n^k} + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \ldots + b_k}{\frac{a_0}{n^m} + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \ldots + a_m} = \left(\infty \cdot \frac{0+0+\ldots+b_k}{0+0+\ldots+a_m} \right) =$$

$$= \left(\infty \cdot \frac{b_k}{a_m} \right) = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } b_k \cdot a_m < 0, \\ +\infty, \text{ dacă } b_k \cdot a_m > 0. \end{cases}$$

4. Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$y_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}.$$

Rezolvare. Deoarece termenii sumei $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ formează o progresie geometrică cu raţia $q = \frac{1}{2}$, apoi $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} =$

$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$. Observăm că termenii sumei $[1+3+5+\ldots+(2n-1)]$ formează o progresie aritmetică. Deci $1+3+5+\ldots+(2n-1) = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2$. Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) = 0 \cdot (2-0) = 0.$$

5. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!\,(2n+1)}$, b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3 + (n+10)^3}{(2n-1)^3 - 9n^2 + 1}$,

c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n-1)}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$.

Rezolvare.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)![1+3n(3n+1)]}{(3n-1)!\cdot 3n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+9n^2+3n}{6n^2+3n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+9+\frac{3}{n}}{6+\frac{3}{n}}=\frac{0+9+0}{6+0}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)^3}{n^3}+\frac{(n+10)^3}{n^3}}{\frac{(2n-1)^3}{n^3}-\frac{9}{n}+\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{10}{n}\right)^3}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3-\frac{9}{n}+\frac{1}{n^3}}=$

$$=\frac{(1-0)^3+(1+0)^3}{(2-0)^3-0+0}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

c) Folosim formula $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n-1)}\cdot\frac{n^3+1-n^3+1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}}=\frac{2\cdot 0}{1+1}=0.$$

6. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}u_n$, dacă

a) $u_n=3^{\frac{6n+1}{3n-4}}$, b) $u_n=\log_2\frac{3n^2}{6n^2+5}$, c) $u_n=\left(\frac{n^2+8}{n^2+7}\right)^{11n^2+7}$

Rezolvare. a) Aplicăm proprietatea 10:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{3n-4}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{3-\frac{4}{n}}}=3^{\frac{6+0}{3-0}}=3^2=9.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \log_2\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{6n^2+5}\right] = \log_2\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{6+\frac{5}{n^2}}\right] = \log_2\frac{3}{6} = -1,$

(conform proprietății 10).

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+8}{n^2+7}\right)^{11n^2+7} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+8}{n^2+7}-1\right)^{11n^2+7} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+8-n^2-7}{n^2+7}\right)^{11n^2+7} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+7}\right)^{11n^2+7} =$$

$$= \left|\begin{array}{l} n^2+7=t \\ n^2=t-7 \\ n\to\infty,\ t\to\infty \end{array}\right| = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{11t-77+7} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{11}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-70} = e^{11}\cdot(1+0)^{-70} = e^{11}.$$

7. Să se demonstreze că

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, a>0.$

Rezolvare. a) Observăm că $\sqrt[n]{n} > 1,\ n = 2,\ 3\ldots.$

Notăm $\sqrt[n]{n} - 1 = x_n > 0.$ Atunci

$$\sqrt[n]{n} = x_n + 1 \Rightarrow n = (1+x_n)^n = 1 + n\cdot x_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \ldots + x_n^n >$$

$$> 1 + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \Rightarrow (n-1) > \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{n}{2}x_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n} > x_n^2 \Rightarrow x_n < \sqrt{\frac{2}{n}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}} = 0.$ Însă $x_n > 0.$ Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

Prin urmare, $\sqrt[n]{n} - 1 = x_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

b) $a>1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}-1=x_n>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}=1+x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a=(1+x_n)^n=1+x_n\cdot n+\ldots+x_n^n \Rightarrow a>n\cdot x_n \Rightarrow x_n<\frac{a}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$. Însă $x_n>0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

Prin urmare, $\sqrt[n]{a}=1+x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1+0=1$.

Dacă $0<a<1$, atunci $\sqrt[n]{a}=\frac{1}{1+x_n}$, $x_n>0$. Deci

$a=\frac{1}{(1+x_n)^n} \Rightarrow (1+x_n)^n=\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a}=1+n\cdot x_n+\ldots+x_n^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{a}>n\cdot x_n \Rightarrow x_n<\frac{1}{n\cdot a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le 0$.

Deoarece $x_n>0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0$.

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ şi $\sqrt[n]{a}=\frac{1}{1+x_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{1+0}=1$.

8. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, dacă $y_n=\frac{n+1}{n^2}\cdot\sin n^2$.

Rezolvare. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0+0=0$.

Deci şirul $\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n^2}\right\}$ este infinit mic. Şirul $\{\sin n^2\}$ este mărginit, deci şirul $\{y_n\}=\left\{\frac{n+1}{n^2}\cdot\sin n^2\right\}$ este infinit mic (vezi proprietatea 5). Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.

9. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $y_n=\frac{n!}{n^n}$ este convergent şi să se calculeze limita lui.

Rezolvare. Aplicăm proprietatea 9. Să demonstrăm că şirul este descrescător şi mărginit inferior. Într-adevăr

$$y_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)^n}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot y_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot y_n.$$

Deoarece $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<1$, rezultă că $y_{n+1}<y_n$.

Observăm că $y_n>0$ pentru orice $n\in N$. Prin urmare, şirul este descrescător şi mărginit inferior, adică el este convergent. Din $y_n>0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \geq 0$.

Să demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Într-adevăr, se ştie că

$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$. Deci $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<\frac{1}{2}$. Prin urmare,

$$y_{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot y_n \Rightarrow y_{n+1}<\frac{1}{2}y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_{n+1}\leq\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} y_n.$$

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Deci $a\leq\frac{a}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}\leq 0\Rightarrow a\leq 0$.

Din relaţiile $a\geq 0$ şi $a\leq 0$ rezultă că $a=0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

10. Să se demonstreze convergenţa şirului $\left\{a^{\frac{1}{2^n}}\right\}$, $a>1$, şi să se calculeze limita lui.

Rezolvare. Să demonstrăm mai întâi că şirul este descrescător şi mărginit. Într-adevăr $y_{n+1}=a^{\frac{1}{2^{n+1}}}=\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{y_n}$. Deci

$a>1\Rightarrow y_n>1\Rightarrow\sqrt{y_n}<y_n\Rightarrow y_{n+1}<y_n$.

Observăm că (y_n) este mărginit inferior fiindcă funcţia $y=a^x$, $a>1$ este mărginită inferior. Deci şirul (y_n) este convergent. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z$. Din relaţia $y_{n+1}=\sqrt{y_n}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{y_n}$ sau $z=\sqrt{z}\Rightarrow z^2=z\Rightarrow z_1=0, z_2=1$.

Deoarece $y_n>1$, rezultă că $z\geq 1$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

11. Să se demonstreze că şirul $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$ este divergent, dacă $a>1$.

Rezolvare. Fie $a>1$. Deci $a=1+\alpha$ cu $\alpha>0$. Prin urmare,

$$a^n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2+...+\alpha^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{n} = \frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = 0 + \alpha + \infty + \ldots = +\infty.$$

Deci şirul $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$ este divergent.

Notă. Şirul $\left\{\frac{n}{a^n}\right\}$, $a>1$ este infinit mic.

Probleme propuse spre rezolvare

1.26. Să se verifice că

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-8} = 1$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

În fiecare caz aparte să se afle $N(\varepsilon)$, dacă $\varepsilon_1=0,01$ şi $\varepsilon_2=0,001$.

1.27. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n^2+7n+1}{4n^3+3n^2+1}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+2n-1}{4n^2+3n+2}\right)^4$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3-\sqrt{n^5+4}}{\sqrt{4n^6+3-n}}$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{7n}+\sqrt[4]{81n^8-4}}{\left(n+4\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-6}}$, j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+7}}{\left(2n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-3}}$,

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n}$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7}$, m) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n+2}$.

1.28. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, dacă:

a) $y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$, b) $y_n = n^2\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)$,

c) $y_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt{n}}$, d) $y_n = \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$,

e) $y_n = \dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2+1}}$, f) $y_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt[4]{n^2-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$,

g) $y_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}-n}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}-n}$, h) $y_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}}$,

i) $y_n = \sqrt[3]{1-n^3}+n$, j) $y_n = \sqrt[3]{n^2-n^3}+n$,

k) $y_n = (n+1)^{4/3} - (n-1)^{4/3}$, l) $y_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}$.

1.29. Să se demonstreze convergența șirurilor numerice și să se calculeze limita lor:

a) $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $y_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... $y_n = \sqrt{2+y_{n-1}}$;

b) $y_n = \dfrac{E(na)}{n}$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x.

1.30. Să se demonstreze că șirul $\{1+(-1)^n\}$, $n \in N$ nu este convergent.

1.31. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, dacă:

a) $u_n = (4^{-n}-2)(5^{-n}-3)$, b) $u_n = \dfrac{n\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$,

c) $u_n = \dfrac{2+4+\ldots+2n}{n+2} - n$, d) $u_n = \dfrac{(n+3)!}{2(n+1)!-(n+2)!}$,

e) $u_n = n - \sqrt[3]{n^3-n^2}$, f) $u_n = \dfrac{(1+n)^3+(2-n)^3}{n^4+3n^2-n+2}$,

g) $u_n = 2n - \sqrt{n(2n-1)}$, h) $u_n = \dfrac{\sqrt{(n^3-1)(n^2+2)} - \sqrt{n(n^4+1)}}{n}$,

i) $u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, j) $u_n = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$.

1.32. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{7^n}\right)$.

1.33. Să se cerceteze convergenţa şirurilor. În caz afirmativ, să se calculeze limita lor:

a) $u_n = \left\{\frac{8\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3+4}\right\}$, b) $u_n = \left\{\frac{(-1)^n\cdot n^2}{n^2+1}\right\}$,

c) $u_n = \left\{-\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$, d) $u_n = \left\{\frac{2n+(-1)^n}{n}\right\}$.

1.34. Să se demonstreze că şirul

$y_1 = \sqrt{a}$, $y_2 = \sqrt{A+\sqrt{a}}$, ..., $y_n = \sqrt{A+y_{n-1}}$, ... este convergent, dacă $A>1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4A+1}+1\right)$.

1.35. Să se demonstreze că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \neq 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Să se explice cazul, când $a=0$.

1.36. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, dacă:

a) $u_n = 7^{\frac{3n}{6n-5}}$, b) $u_n = \lg\frac{n^3+5n^2}{3n^3+4n-1}$,

c) $u_n = \sqrt[6]{\frac{n-\sqrt{n^2-n+1}}{1+2+\ldots+(n-1)}}$, d) $u_n = \left(\frac{15n+8}{15n+7}\right)^{15n+11}$,

e) $u_n = \left(\frac{5n^2-2n+3}{5n^2-2n+2}\right)^{5n^2-2n}$, f) $u_n = \ln\sqrt[5]{\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n-\sqrt[3]{n^3-1}}}$.

1.37. Să se demonstreze că şirul $u_1=0,3$, $u_2=0,33$, $u_n=0,33...3$, ... este convergent şi $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

§3. Limita funcţiei

Fie funcţia $y=f(x)$ definită în vecinătatea punctului x_0 în afară, poate, de însuşi punctul x_0. Numărul A se numeşte *limita funcţiei* $y=f(x)$ *în punctul* $x=x_0$, dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există un număr $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât pentru toate valorile lui $x\neq x_0$ ce satisfac inegalitatea $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|f(x)-A|<\varepsilon$. Se notează $A=\lim_{x\to x_0} f(x)$ sau $f(x)\to A$, când $x\to x_0$. În simbolurile logicei matematice definiţia aceasta se scrie astfel:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Această definiţie a limitei funcţiei se numeşte *definiţia Cauchy* sau definiţia în limbajul "ε-δ". Mai există definiţia limitei funcţiei în limbajul şirurilor sau *definiţia Heine*: $A=\lim_{x\to x_0} f(x)$, dacă pentru orice şir de valori ale argumentului x, diferite de x_0, convergent către x_0, şirul respectiv al valorilor funcţiei converge către numărul A.

Aceste definiţii ale limitei unei funcţii sunt echivalente. De aceea toate proprietăţile referitoare la şirurile numerice sunt valabile şi pentru funcţii (vezi proprietăţile 1-10 din §2), însă aceste proprietăţi pentru funcţii au un caracter local.

Numărul A se numeşte *limită la dreapta (la stânga) a funcţiei* $y=f(x)$ *în punctul* x_0, dacă pentru orice şir convergent către x_0, termenii căruia sunt mai mari (mai mici) decît x_0, şirul respectiv ale valorilor funcţiei converge către A. Se notează: $A=\lim_{x\to x+0} f(x)$ (respectiv $A=\lim_{x\to x-0} f(x)$). Limitele la drepta şi la stânga se numesc *limite laterale*. Avem

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x)\Leftrightarrow\exists\lim_{x\to x_0-0} f(x),\exists\lim_{x\to x_0+0} f(x)\ \text{şi}$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

În acest caz $A=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$.

În limbajul "ε-δ" limitele laterale se definesc astfel:

$$A=\lim_{x\to x_0+0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0, \forall x:\left[0<\left(x-x_0\right)<\delta(\varepsilon)\right]\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon;$$

$$A=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0,\ \forall x:\left[-\delta(\varepsilon)<\left(x-x_0\right)<0\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

Există două limite de bază (remarcabile):

1) *Prima limită remarcabilă* $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ şi consecinţele ei: a) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{tg\,u}{u}=1$, b) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\arcsin u}{u}=1$, c) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{arctg\,u}{u}=1$.

2) *A doua limită remarcabilă* $\lim\limits_{u\to 0}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u=e\left(2<e<3\right)$ şi consecinţele ei:

a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, b) $\lim\limits_{u\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{r}{u}\right)^{ku}=e^{kr}, k,r\in R\backslash\{0\}$,

c) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\log_a(1+u)}{u}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$, $a>1$, $a\neq 1$;

d) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{a^u-1}{u}=\ln a$, $a>1, a\neq 1$; e) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(1+u)^r-1}{u}=r, r\in R$.

Vom explica următoarele relaţii:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Aceasta înseamnă că pentru orice număr $M>0$ există un număr $\delta(M)>0$, astfel încît inegalitatea $0<|x-x_0|<\delta(M)$ implică inegalitatea $|f(x)|>M$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. Aceasta înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $N(\varepsilon)>0$, astfel încît inegalitatea $|x|>N(\varepsilon)$ implică inegalitatea $|f(x)-A|<\varepsilon$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Aceasta înseamnă că pentru orice număr $M>0$ există un număr $N(M)>0$, astfel încît inegalitatea $|x|>N(M)$ implică inegalitatea $|f(x)|>M$.

Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, funcţia $y=f(x)$ se numeşte *infinit mic* în punctul $x=x_0$. Dacă $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, funcţia $y=f(x)$ se numeşte *infinit mare* în punctul $x=x_0$.

Probleme rezolvate

1. Aplicând definiţia limitei unei funcţii în limbajul "ε-δ", să se demonstreze că:

a) $\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+3\right)=1$, b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}$,

c) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, d) $\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{x+1}=-2$.

Rezolvare.

a) După $\varepsilon>0$ trebuie să determinăm $\delta(\varepsilon)>0$, astfel încât $|x-2|<\delta$ să implice $|(x^2-3x+3)-1|<\varepsilon$. Avem $|x^2-3x+3-1|=$ $=|x^2-4x+4+x-2|=|(x-2)^2+(x-2)|\le|(x-2)^2+(x-2)|<\delta^2+\delta=\varepsilon$, de unde $0<\delta=\frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$.

Prin urmare, dacă considerăm că $\delta=\frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$, vom obţine $\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+3\right)=1$.

b) După $\varepsilon>0$ trebuie să determinăm $N(\varepsilon)>0$, astfel încât $|x|>N(\varepsilon)$ să satisfacă relaţia $\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon$. Avem

$$\left|\frac{15x+3-15x-45}{3(3x+9)}\right|=\left|\frac{-42}{3(3x+9)}\right|=\frac{42}{3|3x+9|}=\frac{14}{|3x+9|}<\frac{14}{3|x|}.$$

Dacă impunem ca $\frac{14}{3|x|}<\varepsilon$, obţinem $|x|>\frac{14}{3\varepsilon}$.

Prin urmare, dacă considerăm $N(\varepsilon)=\frac{14}{3\varepsilon}$, atunci

$$\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon \text{ şi } \lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}.$$

c) După $M>0$ trebuie să aflăm $\delta(M)>0$, astfel încât $|x-1|<\delta(M)$ să implice inegalitatea

$$\left|\frac{1}{(x-1)^2}\right|>M \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>M \Leftrightarrow (x-1)^2<\frac{1}{M} \Leftrightarrow |x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Dacă luăm $\delta(M)=\frac{1}{\sqrt{M}}$, atunci $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

d) După $\varepsilon>0$ trebuie să aflăm $\delta(\varepsilon)>0$, în aşa fel ca inegalitatea $|x+1|<\delta(\varepsilon)$ să implice inegalitatea $\left|\frac{3x^2+4x+1}{x+1}+2\right|<\varepsilon$.

Deci $\left|\frac{3x^2+4x+1+2x+2}{x+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3x^2+6x+3}{x+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left|\frac{(x+1)^2}{x+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+1|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Prin urmare, dacă luăm $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, atunci $\left|\frac{3x^2+4x+1}{x+1}+2\right|<\varepsilon$ şi $\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{x+1}=-2$.

2. Să se demonstreze că următoarele limite nu există:

a) $\lim_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$, b) $\lim_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$.

Rezolvare. În acest caz e mai bine să aplicăm definiţia limitei funcţiei după Heine.

a) Considerăm următoarele şiruri cu termenii generali:

$$x_n=1+\frac{1}{\pi n} \text{ şi } x'_n=1+\frac{2}{(4n+1)\pi}, n=1,2,3,\ldots$$

Observăm că $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x'_n=1$.

Cercetăm acum şirurile respective de valori ale funcţiei:

$\{f(x_n)\}=\{\sin n\pi\}=\{0\}$, $n\in N$ şi

$$\{f(x'_n)\} = \left\{\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}\right\} = \left\{\sin\frac{\pi}{2}\right\} = \{1\}, n \in N.$$

Observăm că $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$. Prin urmare, $\lim_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ nu există.

b) Considerăm două şiruri cu termenii generali $x_n = \frac{1}{n}, x'_n = -\frac{1}{n}, n \in N$. Observăm că $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0$. Şirurile respective ale valorilor funcţiei au forma:

$$\{f(x_n)\} = \{2^n\} \text{ şi } \{f(x'_n)\} = \{2^{-n}\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}, n \in N.$$

Avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$, iar $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} =$

$= \frac{1}{+\infty} = 0$. Deci $\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ nu există.

3. Să se calculeze limitele

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{\sqrt{x^4+3x+4}}$, b) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2^x-1}{3^x+4}$, c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{8x^2-x+1}\right)^{4/3}$.

Rezolvare. În toate aceste cazuri avem nedeterminare de forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, când $x\to\infty$.

a) Împărţim numărătorul şi numitorul fracţiei la x la puterea cea mai mare, adică la x^2 şi obţinem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}}} = \frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}} = 3.$$

b) Împărţim numărătorul şi numitorul fracţiei la 3^x şi obţinem:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{1}{3^x}}{1+\frac{4}{3^x}} = \frac{0-0}{1+0} = 0 \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-1}{3^x+4}=\left|\begin{matrix}x=-t\\ x\to-\infty\\ t\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{2^{-t}-1}{3^{-t}+4}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^t}-1}{\frac{1}{3^t}+4}=\frac{0-1}{0+4}=-\frac{1}{4}.$$

c) Împărțim numărătorul și numitorul fracției la x la puterea cea mai mare, adică la $x^{8/3}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{4/3}}{\left(8-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{4/3}}=\frac{(1+0+0)^{4/3}}{(8-0+0)^{4/3}}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}.$$

4. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$;

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}, m,n\in N$;

c) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3+27}$;

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

Rezolvare. În toate aceste cazuri avem nedeterminare de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$. Pentru a le calcula descompunem polinoamele numărătorului și numitorului fracției în factori.

a) Descompunem numărătorul și numitorul în factori:

$$2x^2+5x-3=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-3.$$

Deci $2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3)$.

În mod analog: $3x^2+11x+6=0\Rightarrow x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=-3.$

Deci $3x^2+11x+6=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+3)=(3x+2)(x+3)$.

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(2x-1)(x+3)}{(3x+2)(x+3)}=$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2(-3)-1}{3(-3)+2}=\frac{-6-1}{-9+2}=\frac{-7}{-7}=1.$$

Notă. Se poate aplica următoarea metodă:

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}=\left|\begin{matrix}x+3=u\\ x=u-3\\ x\to -3\\ u\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{2(u-3)^2+5(u-3)-3}{3(u-3)^2+11(u-3)+6}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2\left(u^2-6u+9\right)+5u-15-3}{3\left(u^2-6u+9\right)+11u-33+6}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2u^2-12u+18+5u-15-3}{3u^2-18u+27+11u-33+6}=\lim_{u\to 0}\frac{u(2u-7)}{u(3u-7)}=\frac{2\cdot 0-7}{3\cdot 0-7}=1.$$

b) Folosind formula $x^k-1=(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^{k-1}\right), k\in N,$

obținem $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^{m-1}\right)}{(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{n}.$

c) Avem $12+x-x^2=0\Rightarrow x_1=-3,\ x_2=4$ şi

$-x^2+x+12=(-1)(x+3)(x-4)=(3+x)(-x+4).$

În mod analog, folosind formula $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, avem $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$. Prin urmare,

$$\lim_{x\to -3}\frac{12+x-x^2}{x^3+27}=\lim_{x\to -3}\frac{(3+x)(4-x)}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}=\frac{4+3}{9+9+9}=\frac{7}{27}.$$

d) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\left|\begin{matrix}x-2=u\\ x=u+2\\ x\to 2\\ u\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(u+2)^3+3(u+2)^2-9(u+2)-2}{(u+2)^3-(u+2)-6}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u^3+6u^2+12u+8+3u^2+12u+12-9u-18-2}{u^3+6u^2+12u+8-u-2-6}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u\left(u^2+9u+15\right)}{u\left(u^2+6u+11\right)}=\frac{15}{11}.$$

Notă. Se poate descompune numărătorul şi numitorul în factori folosind metoda împărţirii polinoamelor.

Prin urmare,

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-9x-2 & x-2 \\ \hline -(x^3-2x^2) & x^2+5x+1 \\ \hline 5x^2-9x-2 & \\ -(5x^2-10x) & \\ \hline x-2 & \\ -(x-2) & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^3-x-6 & x-2 \\ \hline -(x^3-2x^2) & x^2+2x+3 \\ \hline 2x^2-x-6 & \\ -(2x^2-4x) & \\ \hline 3x-6 & \\ -(3x-6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

şi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}=\dfrac{4+10+1}{4+4+3}=\dfrac{15}{11}.$

5. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

Rezolvare. În toate aceste cazuri avem nedeterminare de forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Pentru a le calcula, folosim formula

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}),\ n\in N.$$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^3-27)(\sqrt{3x}+x)}{(\sqrt{3x}-x)(\sqrt{3x}+x)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt{3x}+x)}{(-x)(x-3)}=\frac{(9+9+9)(3+3)}{(-3)}=-54.$$

b) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\left[(\sqrt{2x+7}-5)(\sqrt{2x+7}+5)\right](3+\sqrt{x})}{\left[(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})\right](\sqrt{2x+7}+5)}=$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{(2x+7-25)\left(3+\sqrt{x}\right)}{(9-x)\left(\sqrt{2x+7}+5\right)} = \frac{(-2)(3+3)}{5+5} = -\frac{6}{5}.$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1} = \left|\begin{matrix}\sqrt[12]{x}=t\\ x=t^{12}\\ x\to 1\\ t\to 1\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

d) Adăugăm şi scădem *1* la numărător:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)+\left(1-\sqrt[4]{1-2x}\right)}{x+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} +$$

$$+ \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt[4]{1-2x}\right)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}\right)}{\left(x+x^2\right)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{(1-2x)^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x(1+x)\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}\right)} +$$

$$+ \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2x}{x(1+x)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{(1-2x)^3}\right)} =$$

$$= \frac{0}{(1+0)(1+1+1)} + \frac{2}{(1+0)(1+1+1+1)} = 0+\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

6. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$, b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

Rezolvare. În toate aceste cazuri avem nedeterminări de forma $(\infty-\infty)$. Pentru a le calcula le transformăm în nedeterminări de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ ori $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ și apoi folosim metodele respective pentru astfel de nedeterminări:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\infty}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$

$=\frac{\pm 2}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0-0}}=\frac{\pm 2}{2}=\pm 1.$

Deci $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=1$ și

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=-1.$

7. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$,

c) $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$,

e) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$,

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{tg^3x-3tgx}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

Toate aceste limite au nedeterminări de forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ (pot fi şi alte nedeterminări) şi conţin funcţii trigonometrice. În acest caz aplicăm transformările trigonometrice, prima limită remarcabilă şi consecinţele ei.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}=\left|\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{4}=u\\ x=u+\dfrac{\pi}{4}\\ x\to\dfrac{\pi}{4}\\ u\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos\left(u+\dfrac{\pi}{4}\right)}{(-4u)}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-2\left(\cos u\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin u\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{(-4u)}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\cos u-\sin u)}{(-4u)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(1-\cos u)+\sin u}{u}=$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{u}{2}+2\sin\dfrac{u}{2}\cdot\cos\dfrac{u}{2}}{u}=$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{u}{2}}{\dfrac{u}{2}}\right)\cdot\left(\sin\dfrac{u}{2}+\cos\dfrac{u}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot 1\cdot(0+1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)+\sin x}{(1-\cos x)-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{0+1}{0-1}=-1.$

c) $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\left|\begin{matrix}\alpha-\beta=u\\ \alpha=u+\beta\\ \alpha\to\beta\\ u\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin^2(u+\beta)-\sin^2\beta}{u(u+2\beta)}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\left[\sin(u+\beta)-\sin\beta\right]\left[\sin(u+\beta)+\sin\beta\right]}{u(u+2\beta)}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{u}{2}\cos\left(\dfrac{u}{2}+\beta\right)\cdot\left(\sin(u+\beta)+\sin\beta\right)}{u(u+2\beta)}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{u}{2}}{u/2}\right)\cdot\left[\dfrac{\cos\left(\dfrac{u}{2}+\beta\right)\cdot\left(\sin(u+\beta)+\sin\beta\right)}{u+2\beta}\right]=$

$=1\cdot\dfrac{\cos\beta\cdot 2\sin\beta}{0+2\beta}=\dfrac{\sin 2\beta}{2\beta}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{\operatorname{tg}x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-1+\sin x}{tgx}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\dfrac{2\cdot 1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1.$

e) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}=\left|\begin{array}{c}\arccos x=y\\ x=\cos y\\ x\to -1+0\\ y\to \pi-0\end{array}\right|=$

$=\lim\limits_{y\to\pi-0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{y}}{\sqrt{2\cos^2\dfrac{y}{2}}}=\lim\limits_{y\to\pi-0}\dfrac{\left(\sqrt{\pi}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{y}{2}\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{y}\right)}=$

$=\lim\limits_{y\to\pi-0}\dfrac{\pi-y}{\cos\dfrac{y}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{y}\right)}=\lim\limits_{y\to\pi-0}\dfrac{\pi-y}{\cos\dfrac{y}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$=\left|\begin{array}{l}\pi-y=t\\ y=\pi-t\\ y\to\pi-0\\ t\to 0+0\end{array}\right|=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{t}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}\right)}=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{t}{\sin\dfrac{t}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\lim\limits_{t\to 0+0}2\cdot\left(\dfrac{\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot 2\cdot 1=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{tg^3x-3tgx}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\left|\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{3}=u\\ x=u+\dfrac{\pi}{3}\\ x\to\dfrac{\pi}{3}\\ u\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{tg\left(u+\dfrac{\pi}{3}\right)\left[tg^2\left(u+\dfrac{\pi}{3}\right)-\left(\sqrt{3}\right)^2\right]}{\cos\left(u+\dfrac{\pi}{2}\right)}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{tg\left(u+\dfrac{\pi}{3}\right)\left[tg\left(u+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\right]}{(-1)}\cdot\dfrac{\left[tg\left(u+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\right]}{\sin u}=$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{(-1)} \lim_{u\to 0} \frac{tg\left(u+\frac{\pi}{3}\right) - tg\frac{\pi}{3}}{\sin u} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= -6 \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{\sin u \cdot \cos\left(u+\frac{\pi}{3}\right)\cdot \cos\frac{\pi}{3}} = (-6)\cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = (-6)\cdot 4 = -24.$$

8. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$,

b) $\lim_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$,

c) $\lim_{x\to+\infty}(2x-7)[\ln(3x+4)-\ln 3x]$,

d) $\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x}-3^x}{\ln(1-x)}$.

Rezolvare. În aceste cazuri folosim transformările algebrice, a doua limită remarcabilă şi consecinţele ei:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x} = (1^\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{3x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x+3}\right)^{3x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ \left(\frac{2x+3}{3}\to\infty\right)}} \left[\left(1+\frac{3}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{3}}\right]^{\frac{9x}{2x+3}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{2x+3}} = e^{\frac{9}{2+\frac{3}{x}}} = e^{\frac{9}{2+0}} = e^{\frac{9}{2}}.$$

b) $\lim_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}} = (1^\infty) = \left|\begin{matrix} x+1=u \\ x=u-1 \\ x\to -1 \\ u\to 0 \end{matrix}\right| =$

$$= \lim_{u\to 0}(2u-2+3)^{\frac{1}{u}} = \lim_{\substack{u\to 0 \\ (2u\to 0)}}\left[(1+2u)^{\frac{1}{2u}}\right]^2 = e^2.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)\left[\ln(3x+4)-\ln 3x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)\cdot\ln\dfrac{3x+4}{3x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{2x-7}=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^{2x-7}\right]=$

$=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{4(2x-7)}{3x}}\right]=$

$=\ln\left[e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4(2x-7)}{3x}}\right]=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{3}\left(2-\frac{7}{x}\right)}=\ln e^{\frac{8}{3}}=\dfrac{8}{3}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-3^x}{\ln(1-x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(7^{2x}-1\right)+\left(1-3^x\right)}{\ln(1-x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{7^{2x}-1}{2x}\cdot 2x-\dfrac{3^x-1}{x}\cdot x}{\dfrac{\ln(1-x)}{(-x)}\cdot(-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left[\dfrac{\left(7^{2x}-1\right)}{2x}\cdot 2-\dfrac{3^x-1}{x}\right]}{(-x)\left[\dfrac{\ln(1-x)}{(-x)}\right]}=$

$=\dfrac{2\ln 7-\ln 3}{(-1)\cdot 1}=\ln 3-2\ln 7=\ln\dfrac{3}{49}.$

Probleme propuse spre rezolvare

1.38. Reieşind din definiţia limitei funcţiei în limbajul "ε-δ", să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x-14\right)=-10$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{5x^2+4}=\dfrac{3}{5}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{5x+4}=\dfrac{1}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-3x-1\right)=1$;

e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}=-1$;

f) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{2}$.

1.39. Să se demonstreze că următoarele limite nu există:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\cos x)\cdot e^x$,

c) $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{x}{x-1}}$.

1.40. Să se calculeze limitele laterale:

a) $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}$ şi $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}$,

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \frac{2}{1+2^{tgx}}$ şi $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \frac{2}{1+2^{tgx}}$,

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0} 5^{tg\,2x}$ şi $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}-0} 5^{tg\,2x}$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{a^x+1}$,

e) $\lim\limits_{x\to 4\pm 0} \frac{x-4}{|x-4|}$,

f) $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} \frac{3+x}{9-x^2}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} (2+x)^{\frac{1}{x}}$,

h) $\lim\limits_{x\to 2\pi\pm 0} \frac{x^2}{\cos x-1}$.

i) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)$, dacă $f(x)=\begin{cases} x+1, 0\le x\le 1 \\ 3x+1, 1\le x\le 3 \end{cases}$.

1.41. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+x}{x^4-3x^2+1}$,

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4+5x^2+3x^5}{x^2+3x-1}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3+4x^2-1}{x^4-3x-2}$,

f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^5+10x-11}{3x^4-2x^2+1}$,

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$,

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x^2}}\right)$,

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$,

j) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3^x+1}{5^x+2}$,

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7^{2x}+3^{2x}}{5^{2x}+2^{2x}}$,

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{2x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$,

n) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^6+\sqrt{x^4+1}}}{2+x+x^2}$.

1.42. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$,

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^5-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{(x+2)^2}$,

e) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4-4x^2+3}$,

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$,

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^4}{(x^3-12x+16)^2}$,

h) $\lim\limits_{x\to -3-0}\dfrac{3x^2+10x+3}{\sqrt{4x^2+11x-3}}$.

1.43. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$,

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$,

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$,

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$,

i) $\lim\limits_{x\to +1}\dfrac{\left(-1+\sqrt[7]{x}\right)}{\left(-1+\sqrt[3]{x}\right)}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x^2+x}$,

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$,

l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}$.

1.44. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right]$,

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$,

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$, f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$,

h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$, i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

j) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$, k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$,

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$, m) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$,

1.45. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos\pi x}{\sin\pi x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 7x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\arcsin 2x}{4x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-ctgx\right)$, f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)tgx$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}$, h) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x^n}{\sin^m x}$, $(n,m\in N)$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+arctgx}$, j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$,

k) $\lim\limits_{y\to a}\left[\sin\frac{y-a}{2}\cdot tg\frac{\pi y}{2a}\right]$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}$,

n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+arctg3x}-\sqrt[3]{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1+arctg2x}}$,

o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$, p) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}$,

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$, s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$,

1.46. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$, d) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\pi x}$,

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(2+x)-\ln x\right]$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{x}$,

g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a x-1}{x-a}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$,

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$, j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$,

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\right]$, l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x+2}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, n) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$,

o) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+2}}$, p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^x$, r) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

Exemple mixte

1.47. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{1-5x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$, e) $\lim\limits_{x\to -1}\cos\dfrac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{ctg^2 2x}$, h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{1-ctgx}$, i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x)$,

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$, k) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[x]{a}-1\right), a>0$, l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x+2^x-2}{10^x-5^x}$.

1.48. Să se afle constantele A şi B, astfel încât să se îndeplinească relaţiile:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-Ax-B\right)=0$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-Ax-B\right)=0$.

1.49. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(Ax+1)^n}{x^n+B}$, dacă:

a) $n\in N$, b) n este un număr întreg negativ, c) $n=0$.

1.50. Să se determine α, β, γ şi $p\in R$, astfel că

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+3}-(\alpha x^p+\beta x+\gamma)\right]=\frac{7}{3}.$$

§4. Funcţii continue

Fie funcţia $y=f(x)$ definită într-o vecinătate a punctului x_0. Funcţia $y=f(x)$ se numeşte *continuă* în punctul x_0, dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Notăm $x=x_0+\Delta x$ şi $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. În aceste notaţii definiţia continuităţii se mai poate scrie astfel: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Definiţia continuităţii poate fi exprimată în limbajul "ε-δ" sau cu ajutorul şirurilor (vezi §3).

Funcţia $y=f(x)$ este *continuă la dreapta* în x_0, dacă $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$. Funcţia $y=f(x)$ este *continuă la stînga* în x_0, dacă $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

Funcţia $y=f(x)$ este continuă în x_0, dacă şi numai dacă este continuă la stînga şi la dreapta în x_0.

Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt continue în x_0, atunci şi funcţiile $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ sunt continue în punctul x_0. De asemenea compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă, dacă funcţia compusă are sens.

Funcţia $y=f(x)$ este continuă pe domeniul D, dacă ea este continuă în fiecare punct al acestui domeniu.

Punctul x_0 se numeşte *punct de discontinuitate*, dacă funcţia $f(x)$ nu este continuă în acest punct. Punctul x_0 este *punct de discontinuitate de speţa 1* pentru funcţia $f(x)$, dacă limitele laterale în punctul x_0 există şi sunt finite ([1], [3], [6], [15]).

Punctul x_0 se *numeşte punct de discontinuitate de speţa 2* pentru $y=f(x)$, dacă cel puţin una din limitele ei laterale nu există sau este infinită.

Probleme rezolvate

1. Reieşind din definiţia continuităţii în limbajul "ε-δ", să se demonstreze că funcţia $f(x)=2x^2+1$ este continuă în punctul $x_0=1$ şi să se afle $\delta(\varepsilon)$.

Rezolvare. Avem $f(x)=2x^2+1$ şi $f(x_0)=f(1)=3$. După $\varepsilon>0$, trebuie să aflăm $\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît inegalitatea $|x-1|<\delta(\varepsilon)$ să implice inegalitatea $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Avem

$$|2x^2+1-3|=|2(x^2-2x+1)+4x-4|=|2(x-1)^2+4(x-1)|\le$$
$$\le 2|(x-1)^2|+4|x-1|<2\delta^2+4\delta=\varepsilon.$$

Deci $0<\delta=\frac{-2+\sqrt{4+2\varepsilon}}{2}$.

Prin urmare, dacă luăm $\delta(\varepsilon)=\dfrac{-2+\sqrt{4+2\varepsilon}}{2}$, apoi inegalitatea $|x-1|<\delta(\varepsilon)$ implică inegalitatea $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Deci funcţia $f(x)=2x^2+1$ este continuă în $x_0=1$.

2. Să se studieze continuitatea funcţiilor:

a) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x>0, \\ -x^2+x, x\le 0. \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} e^x+x-1, x\le 1, \\ x^{\frac{1}{x-1}}, x>1. \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq 0, \\ 1, x=0. \end{cases}$

d) $f(x)=xE(x)$ pe intervalul $]0, +\infty[$, unde $E(x)$ este partea întreagă a lui x.

e) Funcţia Dirichlet $D(x)=\begin{cases} 1, \textit{dacă } x \textit{ este} \text{ raţional}, \\ 0, \textit{ dacă } x \textit{ este} \text{ iraţional}. \end{cases}$

Rezolvare.

a) $f(x)$ este continuă în orice punct $x\neq 0$. În punctul $x=0$ avem $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$ (ca produsul unei funcţii infinit mici la o funcţie mărginită);

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\left(-x^2+x\right)=0+0=0=f(0)$.

Prin urmare, funcţia $f(x)$ este continuă şi în punctul $x=0$.

b) Deoarece $f(x)$ este continuă în rest, vom studia continuitatea ei în punctul $x_0=1$. Avem

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(e^x+x-1\right)=e+1-1=e,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} x^{\frac{1}{x-1}}=\begin{vmatrix} x-1=u \\ x=u+1 \\ x\to 1+0 \\ u\to 0+0 \end{vmatrix}=\lim_{u\to 0+0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

şi $f(1)=e+1-1=e$. Aceasta înseamnă că funcţia $f(x)$ este continuă pe R.

c) Pentru $x \neq 0$ funcția $f(x)$ este continuă ca raportul a două funcții continue. Studiem continuitatea funcției în punctul $x=0$. Avem $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{(-x)} = -1$ şi f(1)=1.

Prin urmare, punctul $x=0$ este un punct de discontinuitate de speța 1.

d) Conform definiției funcției $E(x)$ pe $]0, +\infty[$, avem

$$E(x) = \begin{cases} 0, x \in]0,1[\\ 1, x \in [1,2[\\ \quad \ldots \\ n, x \in [n, n+1[\\ \quad \ldots \end{cases} \text{. Deci } xE(x) = \begin{cases} 0, x \in]0,1[\\ x, x \in [1,2[\\ \quad \ldots \\ nx, x \in [n, n+1[\\ \quad \ldots \end{cases}.$$

După cum se vede din expresia funcției $xE(x)$, problema continuității se pune în punctele $x=n$, $n \in N$. Pentru aceasta observăm că $\lim\limits_{x\to n-0} f(x) = \lim\limits_{x\to n-0} (n-1)x = (n-1)n = n^2 - n$,

$\lim\limits_{x\to n+0} f(x) = \lim\limits_{x\to n+0} nx = n^2$ şi $f(n)=n^2$.

Prin urmare, $f(x)$ este continuă pe $[0, +\infty[\setminus N$, este continuă la dreapta în $x=n$, $n \in N$. Punctele $x=n$, $n \in N$, sunt puncte de discontinuitate de speța 1.

e) Fie x_0 un număr real. Avem două cazuri: x_0 este rațional sau x_0 este irațional. Dacă x_0 este rațional, apoi $D(x_0)=1$. În orice vecinătate a punctului rațional x_0 există numere irraționale x pentru care $f(x)=0$. Deci $|\Delta y| = |D(x)-D(x_0)| = |0-1| = 1$, adică $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y \neq 0$.

Dacă însă x_0 este irațional, apoi $D(x_0)=0$. În orice vecinătate a punctului irațional x_0 se află numere raționale x, deci $D(x)=1$. Prin urmare, $|\Delta y| = |D(x)-D(x_0)| = |1-0| = 1$, adică $\lim\limits_{x\to x_0} \Delta y \neq 0$. Punctul x_0 este un punct de discontinuitate de speța 2: $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ nu există.

Notă. În mod analog se demonstrează că şi funcţia $D^*(x)=\begin{cases}0, x-\text{raţional}\\ 1, x-\text{iraţional}\end{cases}$ este discontinuă în orice punct de pe axa numerică.

Observăm însă că funcţiile $D(x)+D^*(x)=1$, $x\in R$, şi $D(x)\cdot D^*(x)=0$, $x\in R$, sunt continue pe toată axa numerică (ca funcţii constante).

Probleme propuse spre rezolvare

1.51. Reieşind din definiţia continuităţii funcţiei, să se demonstreze că funcţia dată este continuă în x_0 şi să se afle $\delta(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon=0,01$:

a) $f(x)=x^2-3x+3, x_0=2$; b) $f(x)=3x-8, x_0=1$;

c) $f(x)=\dfrac{3x+1}{5x+9}, x_0=+\infty\left(f(+\infty)=\dfrac{3}{5}\right)$;

d) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\text{ raţional}\\ -x^2, x\text{ iraţional}, x_0=0\end{cases}$.

1.52. Să se studieze continuitatea funcţiilor:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$; b) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$;

c) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$; d) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$;

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ 3, x=0\end{cases}$; f) $f(x)=\begin{cases}3^{\frac{1}{x}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$;

g) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; h) $f(x)=\begin{cases}4\cdot 5^x, x<0\\ x+4, x\geq 0\end{cases}$.

1.53. Să se cerceteze continuitatea funcţiilor:

a) $f(x)=\begin{cases}x+3, x\leq -1\\ x^2+1, -1<x<1\\ 2x, x\geq 1\end{cases}$; b) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}+1$;

c) $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 0 \\ -(x-1)^2, 0<x<3; \\ x-3, x\ge 3 \end{cases}$ d) $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}$;

e) $f(x)=\begin{cases} -1, x<0 \\ \cos x, 0\le x\le \pi; \\ 1-x, x>\pi \end{cases}$ f) $f(x)=\dfrac{3x}{x-4}$.

1.54. Să se determine parametrii A şi B, astfel încît funcţiile următoare să fie continue:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, x<0 \\ A\sin x+B\cos x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 4\cdot 3^x, x<0 \\ 2A+x, x\ge 0 \end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{tgx}{x}, x\ne 0 \\ A, x=0 \end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x^2-3x}{2x}, x\ne 0 \\ A, x=0 \end{cases}$; e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, x\ne 0 \\ A, x=0 \end{cases}$;

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}, x\ne 2\pi k, k\in Z \\ A, x=2\pi k, k\in Z \end{cases}$;

g) $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 1 \\ Ax^2-2, x>1 \end{cases}$; h) $f(x)=\begin{cases} Ax+1, x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x+B, x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

1.55. Să se clasifice punctele de discontinuitate ale funcţiilor:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$; b) $f(x)=tg\dfrac{1}{x}$;

c) $f(x)=\begin{cases} x+2, x<2 \\ x^2-1, x\ge 2 \end{cases}$; d) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-5}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{4-2^{\frac{1}{x}}}$;

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x^2+3), & x\le 1\\ 6-5x, & 1<x<3;\\ x-3, & x\ge 3\end{cases}$

g) $f(x)=E(x)+E(-x)$;

h) $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$;

i) $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x^3}$;

j) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;

k) $f(x)=2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$;

l) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^x-1}$.

§5. Compararea funcţiilor infinit mari şi infinit mici

Fie $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ funcţii infinit mici în punctul $x=x_0$, adică $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. A compara aceste două funcţii înseamnă a studia limita raportului lor:

1) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, atunci spunem că $\alpha(x)$ este *infinit mic de ordin superior* în raport cu $\beta(x)$. Se notează: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

2) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, atunci se spune că $\alpha(x)$ este *infinit mic de ordin inferior* în raport cu $\beta(x)$.

3) Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, atunci se spune că $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt *infiniţi mici de acelaşi ordin*. În cazul cînd $A=1$, se spune că $\alpha(x)$ şi $\beta(x)$ sunt *echivalente*. Se notează: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

4) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=A\neq 0, k\in R$, atunci spunem că $\alpha(x)$ este *infinit mic de ordinul k* în raport cu $\beta(x)$ sau $\alpha(x)$ are ordinul k de descreştere în raport cu $\beta(x)$.

Fie $f(x)$ şi $g(x)$ funcţii infinit mari în punctul x_0. Compararea lor se face în mod analog:

a) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, atunci spunem că $f(x)$ este *infinit mare de ordin superior* în raport cu $g(x)$.

b) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, atunci spunem că $f(x)$ este *infinit mare de ordin inferior* în raport cu $g(x)$.

c) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$, atunci spunem că $f(x)$ şi $g(x)$ au *acelaşi ordin*. Când $A=1$, se spune că infiniţii mari $f(x)$ şi $g(x)$ sunt *echivalenţi*. Se notează: $f(x)\sim g(x)$.

d) Dacă $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[g(x)]^k}=A\neq 0, k\in R$, atunci spunem că $f(x)$ este *infinit mare de ordin k* în raport cu $g(x)$ ori $f(x)$ are ordinul k de creştere în raport cu $g(x)$.

Pot fi formulate reguli analogice pentru compararea funcţiilor infinit mici şi infinit mari când

$$x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty,\ x\to x_0-0,\ x\to x_0+0.$$

La calcularea nedeterminărilor de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ sau $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ în multe cazuri se aplică următoarele teoreme:

T1. Limita raportului a două funcţii infinit mici (infinit mari) nu se schimbă, dacă ambele funcţii sau una din ele se înlocuieşte cu o funcţie echivalentă.

T2. Dacă $f(x)\sim f_1(x)$ şi $g(x)\sim g_1(x)$ când $x\to x_0$, atunci $f(x)\cdot g(x)\sim f_1(x)\cdot g_1(x)$, unde $f(x), f_1(x), g(x), g_1(x)$ sunt funcţii infinit mici sau numai infinit mari în punctul x_0.

T3. Suma algebrică a unui număr finit de funcţii infinit mici (infinit mari) de diferite ordine de descreştere (de creştere) este echivalentă cu termenul, care are cel mai mic ordin de descreştere (cel mai mare ordin de creştere).

Exemple de funcţii echivalente:

1) $\sin u(x) \sim u(x)$, 2) $\operatorname{tg} u(x) \sim u(x)$,

3) $\arcsin u(x) \sim u(x)$, 4) $arctg\, u(x) \sim u(x)$,

5) $1-\cos u(x) \sim \frac{1}{2}[u(x)]^2$, 6) $\log_a[1+u(x)] \sim \frac{u(x)}{\ln a}$,

7) $\ln(1+u(x)) \sim u(x)$, 8) $a^{u(x)}-1 \sim u(x)\cdot \ln a$,

9) $e^{u(x)}-1 \sim u(x)$, 10) $\{[1+u(x)]^k-1\} \sim ku(x), k \in R$.

În formulele 1-10 funcţia $u(x)$ este o funcţie infinit mică, când $x \to x_0$.

11) $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \sim a_nx^n$, cînd $x \to \infty$,

12) $P_n(x) \sim a_ix^i$, când $x \to 0$, dacă $a_0=a_1=\ldots=a_{i-1}=0$, $0<i<n$.

Probleme rezolvate

1. Să se afle numerele reale k şi A din relaţia: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}=A\neq 0$, pentru

a) $f(x)=\ln(1+x^2+x^3)$, b) $f(x)=\sin x-tg\, x$,

c) $f(x)=\frac{x^2(1+x)}{1+\sqrt[3]{x}}$.

Rezolvare.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(x^2+x^3)]}{(x^2+x^3)}\cdot\frac{x^2+x^3}{x^k}=$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{x^{k-2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)\cdot x^{2-k}=(1+0)\cdot\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=A\neq 0.$

De aici rezultă că $2-k=0$, adică $k=2$. Prin urmare, dacă $k=2$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-1)}{x^k\cdot\cos x}=$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)\cdot\left(\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^k}\right)=-1\cdot 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^{k-3}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{3-k}.$$

Pentru ca ultima limită să fie egală cu un număr finit $A\neq 0$, este necesar $k=3$.

Prin urmare, dacă $k=3$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+x)}{x^k\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}$.

De aici rezultă $k=2$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$.

2. Să se calculeze numerele reale k şi A din relaţia $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left[g(x)\right]^k}=A\neq 0$, dacă

a) $f(x)=\dfrac{x^4}{\left(x^2-1\right)^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x_0=1$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$, $g(x)=x$, $x_0=+\infty$.

Rezolvare.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\left[g(x)\right]^k}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4\cdot(x-1)^k}{\left(x^2-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4}{(x+1)^2}\cdot(x-1)^{k-2}=$

$= \frac{1}{2^2}\lim_{x\to 1}(x-1)^{k-2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 1}(x-1)^{k-2}$. De aici rezultă k=2. Prin urmare, dacă k=2, atunci $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{1}{4} \neq 0$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^k} =$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^{3k-2}}-\frac{1}{x^{3k-1}}}+\sqrt{\frac{1}{x^{2k-1}}}\right)$.

Pentru ca ultima limită să fie egală cu un număr $A\neq 0$, este destul de luat $3k-2=0$. De unde $k=\frac{2}{3}$. În cazul acesta obținem:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{[g(x)]^{2/3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^0}-\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x^{1/3}}}\right) = \sqrt[3]{1}+0 = 1 \neq 0.$$

3. Să se calculeze $\sqrt[3]{125{,}009}$ şi $\sqrt[5]{0{,}993}$.

Rezolvare.

a) $\sqrt[3]{125{,}009} = \sqrt[3]{125+0{,}009} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{0{,}009}{125}\right)} = 5\sqrt[3]{1+\frac{0{,}009}{125}} \approx$

$\approx 5\left(1+\frac{0{,}009}{3\cdot 125}\right) = 5\left(1+\frac{0{,}003}{125}\right) = 5(1+0{,}000024) =$

$= 5\cdot 1{,}000024 = 5{,}00012$ (am aplicat formula 10, $k=\frac{1}{3}$).

b) $\sqrt[5]{0{,}993} = \sqrt[5]{1-0{,}007} \approx 1-\frac{0{,}007}{5} = 1-0{,}0014 = 0{,}9986$

(am aplicat formula 10, $k=1/5$).

4. Folosind formulele 1-12 şi teoremele T1-T3 să se calculeze limitele:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$, b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\arcsin^2 x-arctg^2 x}{3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}{\left(arctg\sqrt{x}\right)^2\left(e^{5\sqrt[4]{x}}-1\right)}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{x+9}-3}$,

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cos\dfrac{\pi x}{4}}{\sin\pi x^2}$, g) $\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2-3y}+\sqrt[3]{y^2}-2}{\sqrt{6-y^3}-4y}$,

Rezolvare.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+(\cos x-1)\right)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\dfrac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{4}}=-2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x+x^2\right)}{2}\cdot\dfrac{1}{4x}=\dfrac{1}{8}\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=\dfrac{1}{8}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-arctg^2 x+\arcsin^2 x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2+x^2}{3x}=\dfrac{2}{3}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}{\left(arctg\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(e^{5\sqrt[4]{x}}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot 3x}{x\cdot 5\sqrt[3]{x}}=\dfrac{3}{5}.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{8}}-1\right)}{3\left(\sqrt{1+\dfrac{x}{9}}-1\right)}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{8}\cdot\dfrac{1}{3}}{\dfrac{x}{9}\cdot\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{18}{24}=\dfrac{1}{2}.$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cos\dfrac{\pi x}{4}}{\sin\pi x^2}=\left|\begin{array}{l}x-2=u\\x=u+2\\x\to 2\\u\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}(u+2)}{\sin\pi(u+2)^2}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u\cdot\left(-\sin\dfrac{\pi u}{4}\right)}{\sin\left(\pi u^2+4\pi u+4\pi\right)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u\cdot\left(-\sin\dfrac{\pi u}{4}\right)}{\sin\left(\pi u^2+4\pi u\right)}=$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u\cdot\left(-\frac{\pi u}{4}\right)}{\pi u(u+4)} = 0.$$

g) $\lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{2-3y}+\sqrt[3]{y^2}-2}{\sqrt{6-y^3}-4y} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \left| \begin{matrix} \sqrt[4]{2-3y}+\sqrt[3]{y^2}-2 \sim (-3y)^{1/4}+y^{2/3} \sim y^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{6-y^3}-4y \sim (-y)^{3/2}-y \sim (-y)^{3/2} \end{matrix} \right| = \lim_{y\to-\infty} \frac{y^{\frac{2}{3}}}{(-y)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Probleme propuse spre rezolvare

1.56. Să se compare $f(x)$ cu $g(x)=x$, cînd $x\to 0$, dacă:

a) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$, b) $f(x)=\sqrt[5]{x}\cdot e^x$,

c) $f(x)=2x-\sin x$, d) $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$,

e) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)$, f) $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x-1}}$,

g) $f(x)=2^x-\cos x$, h) $f(x)=\sin\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$.

1.57. Să se compare următoarele funcţii infinit mari:

a) $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\to 0$;

b) $f(x)=x^2+4$, $g(x)=x^3-2$, $x\to\infty$;

c) $f(x)=\dfrac{A}{1-\sqrt[n]{x}}$, $A\neq 0, n\in N$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x\to 1$;

d) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, $g(x)=\dfrac{1}{\pi-2x}$, $x\to\dfrac{\pi}{2}$.

1.58. Să se afle numerele reale k şi A din relaţia $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=A\neq 0$, dacă

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$, b) $f(x)=tgx+\sin x$,

c) $f(x)=\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}, a>0$, d) $f(x)=e^{\sin x}-1$,

e) $f(x)=\arcsin\left(\sqrt{4+x^2}-2\right)$, f) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}, x>0$,

g) $f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)$, h) $f(x)=\cos 3x-\cos x$,

i) $f(x)=\sqrt{\sin^2 x+x^4}$, j) $f(x)=arctg\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)$.

1.59. Să se calculeze numerele reale k şi A din relaţia $\lim\frac{f(x)}{x^k}=A\neq 0$, dacă

a) $f(x)=x^5+150x^4+x+10$, b) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}+|x|$,

c) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}, x>0$, d) $f(x)=\frac{3x^7}{2x^4+x^2+1}$,

e) $f(x)=\frac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}, x>0$, f) $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}$.

1.60. Să se calculeze: a) $\sqrt{1,02}$, b) $\sqrt{0,994}$, c) $\sqrt{25,3}$,

d) $(1,03)^5$, e) $(0,97)^4$.

1.61. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-x^2-x^3}{tgx-2\sin^2 x+5x^4}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{tg^2x-6\sin^2 x+x-5x^2}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x+x\,\mathrm{tg}7x}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x^2}{\arcsin 3x\cdot\sin\frac{x}{2}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin 3x+\mathrm{arctg}x^2}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[5]{x^2}\cdot\ln^2(1-3x)}{\left(arctg\sqrt[3]{x}\right)^3\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)^2}$,

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$,

j) $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{tg\sqrt[3]{3-x}-\sin\sqrt[3]{27-x^3}}{tg\sqrt{3-x}+\sin\sqrt{9-x^2}}$,

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x^2+7}-2}$,

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x+1)}$.

1.62. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-3x^3-5x^5}{8-7x^2+16x^4}$,

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(a+2x)^2(b-x)^3}{(a+x)^5+(b-2x)^5}$,

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[4]{100x+\sqrt{x}}}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot 3^{\frac{4}{x}}-x\right)$.

Capitolul 2

CALCULUL DIFERENȚIAL AL FUNCȚIEI DE O VARIABILĂ REALĂ

§1. Derivata funcției

Fie $y=f(x)$ definită într-o vecinătate a punctului x_0. Se numește *derivata funcției* $y=f(x)$ *în punctul* x_0 limita

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

dacă ea există, și se notează $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ sau $\frac{dy}{dx}(x_0)$. Dacă $f'(x)$ este finită, se spune că $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0.

Dacă $y=f(x)$ este derivabilă în x_0, atunci ea este continuă în acest punct, însă afirmația reciprocă nu este adevărată. Funcția $f(x)$ este derivabilă pe intervalul I, dacă este derivabilă în fiecare punct din I.

Limitele $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ și

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

se numesc respectiv *derivata la stânga și derivata la dreapta a funcției* $y=f(x)$ *în punctul* x_0. Se notează $f'(x_0-0)$ și $f'(x_0+0)$. Funcția $f(x)$ are derivată în x_0, dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0. Evident că în acest caz $f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$.

Reieșind din sensul geometric al derivatei, *ecuația tangentei la graficul funcției* $y=f(x)$ în punctul $(x_0,\ y_0=f(x_0))$ are forma $y_0-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, iar ecuația normalei este

$$y_n-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Dacă funcțiile $u=u(x)$, $v=v(x)$ sunt derivabile pe I, atunci funcțiile $u\pm v$, $u\cdot v$, $\frac{u}{v}$ $(v\neq 0)$ sunt derivabile pe I și $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(u\cdot v)'=$

$=u'\cdot v+u\cdot v'$; $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

Dacă funcția $y=f(x)$ este derivabilă pe I, funcția $u=g(y)$ este derivabilă pe G și are sens funcția compusă, atunci funcția compusă $g(f(x))$ este derivabilă pe I și

$$[g(f(x))]'=g'(y)\cdot f'(x).$$

Dacă funcția $y=f(x)$ posedă în punctul x_0 derivată și $f'(x_0)\neq 0$, atunci funcția inversă $x=\varphi(y)$ de asemenea posedă derivată în punctul $y_0=f(x_0)$ și $\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

Dacă funcția $y=f(x)$ este definită parametric: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in I$, și funcțiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sunt derivabile în $t_0\in I$, atunci funcția $y=f(x)$ este derivabilă în punctul respectiv $x_0=\varphi(t_0)$ și $f'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$, adică $y'(x_0)=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ cu $x'(t_0)\neq 0$.

Funcțiile

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

se numesc *funcții hiperbolice*. Remarcăm următoarele formule specifice:

$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$, $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$,

$\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}2x$, $\operatorname{ch}2x-1=2\operatorname{sh}^2x$,

$1-\operatorname{th}^2x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$, $\operatorname{cth}2x-1=\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$

Prezentăm mai jos următorul tabel de derivate:

1. $(y=\text{const})'=0$;

2. $(x^r)'=rx^{r-1}$, $r\in R$. În particular, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$. În particular, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $(x>0)$;

4. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$. În particular $(e^x)'=e^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$;

5. $(\sin x)'=\cos x$; 6. $(\cos x)'=-\sin x$;

7. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; 8. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;

9. $(shx)'=chx$; 10. $(chx)'=shx$;

11. $(thx)'=\frac{1}{ch^2 x}$; 12. $(cthx)'=-\frac{1}{sh^2 x}$;

13. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$; 16. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Evident că $f'(x)$ depinde de x, adică este o funcție de x. Derivata de la această funcție se numește *derivată de ordinul doi* și se notează $f''(x)$. În mod analog se definesc derivatele de ordinul *3, 4, ..., n* și se notează y''', y^{IV}, ... , $y^{(n)}$. Derivatele de ordinul *2, 3, ..., n* se numesc *derivate de ordin superior*. Remarcăm următoarele proprietăți:

a) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;

b) Formula Leibniz:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}\cdot v''+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}+\ldots+u\cdot v^{(n)},$$

unde u și v sunt funcții ce depind de x.

Probleme rezolvate

1. Folosind definiția, să se calculeze derivata $f'(x_0)$ pentru

a) $f(x)=\cos 3x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; b) $f(x)=\arccos(x-1)$, $x_0=1$.

Rezolvare.

a) $$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 3x-\cos\frac{3\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\sin\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= (-2)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= (-2)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= (-2)\sin\frac{3\pi}{4}\cdot 1\cdot\frac{3}{2} = (-2)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

b) $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{\arccos(x-1)-\frac{\pi}{2}}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{l} \arccos(x-1)=y \\ x-1=\cos y \\ x\to 1 \\ y\to\frac{\pi}{2} \end{array}\right| =$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{\cos y} = \left|\begin{array}{l} y-\frac{\pi}{2}=u \\ y=u+\frac{\pi}{2} \\ y\to\frac{\pi}{2},\ u\to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{(-\sin u)} = -\lim_{u\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin u}{u}\right)} = -1.$$

2. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției *f(x)* în punctul x_0 pentru

a) $f(x) = \begin{cases} (x-2)arctg\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2 \\ 0, & x=2, \end{cases}$ $\qquad x_0 = 2;$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, |x|\le 1 \\ e^{-1}, |x|>1, \end{cases} \quad x_0=1.$

Rezolvare.

a) $f'(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{(x-2)arctg\dfrac{1}{x-2}-0}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2-0} arctg\dfrac{1}{x-2}=arctg(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}.$

$f'(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{(x-2)arctg\dfrac{1}{x-2}-0}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2+0} arctg\dfrac{1}{x-2}=arctg(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}.$

Prin urmare, funcţia $f(x)$ nu este derivabilă în $x_0=2$, deoarece $f'(2-0)\neq f'(2+0)$.

b) $f'(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2e^{-x^2}-1\cdot e^{-1}}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(x^2-1)e^{-x^2}+e^{-x^2}-e^{-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(x^2-1)e^{-x^2}}{x-1}+$

$+\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{e^{-1}\left(e^{-(x^2-1)}-1\right)}{x-1}=$

$=2e^{-1}+\lim\limits_{x\to 1-0}\left[\dfrac{e^{-(x^2-1)}-1}{(-x^2+1)}\right]\cdot\dfrac{(-x^2+1)\cdot e^{-1}}{x-1}=$

$=2e^{-1}+1\cdot(-2e^{-1})=2e^{-1}-2e^{-1}=0.$

$f'(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{e^{-1}-1\cdot e^{-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+0}0=0.$

Prin urmare, în punctul $x_0=1$ funcţia $f(x)$ este derivabilă: $f'(1-0)=f'(1+0)=0$.

3. Să se cerceteze derivabilitatea funcţiilor:

a) $f(x)=|\ln x|$, $x>0$;

b) $f(x)=\max(\cos^2 x, \cos x)$, $x\in]0, \pi[$;

c) $f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$.

Rezolvare.

a) Avem $f(x)=\begin{cases} \ln x, \ln x\geq 0 \\ -\ln x, \ln x<0 \end{cases}$ sau $f(x)=\begin{cases} \ln x, x\geq 1 \\ -\ln x, 0<x<1 \end{cases}$.

Observăm că $f(x)$ este derivabilă pe $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (ca funcţie elementară de bază). Rămîne să studiem derivabilitatea în punctul $x_0=1$.

Avem

$$f'(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\ln x-\ln 1}{x-1}=-\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{x-1}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l} x-1=u \\ x=u+1 \\ x\to 1-0, u\to 0-0 \end{array}\right|=-\lim_{u\to 0-0}\frac{\ln(1+u)}{u}=-1.$$

Similar obţinem $f'(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln x}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\left|\begin{array}{l} x-1=u \\ x=u+1 \\ x\to 1+0, u\to 0+0 \end{array}\right|=\lim_{u\to 0+0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1.$$

Prin urmare, $f'(1-0)\neq f'(1+0)$ şi funcţia $f(x)$ este derivabilă pe $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

b) Avem $f(x)=\begin{cases} \cos x, x\in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \cos^2 x, x\in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$.

Funcţia este derivabilă pe fiecare din intervalele $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ şi $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Rămâne să studiem derivabilitatea în punctul $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Deci $f'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{2}=u\\ x=u+\frac{\pi}{2}\\ x\to\frac{\pi}{2}-0\\ u\to 0-0\end{array}\right|=\lim_{u\to 0-0}\frac{\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{u}=$$

$=\lim\limits_{u\to 0-0}\frac{(-\sin u)}{u}=-1$ şi $f'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\cos^2 x-0}{x-\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{2}=u\\ x=u+\frac{\pi}{2}\\ x\to\frac{\pi}{2}+0\\ u\to 0+0\end{array}\right|=\lim_{u\to 0+0}\frac{\cos^2\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{u}=$$

$$=\lim_{u\to 0+0}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cdot u=1\cdot 0=0.$$

Astfel, am obţinut că funcţia $f(x)$ nu este derivabilă în $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Prin urmare, ea este derivabilă pe $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

c) Funcţia $f(x)=arctg\frac{1+x}{1-x}$ este derivabilă pentru $x\neq 1$. Rămâne să studiem derivabilitatea ei în punctul $x_0=1$. Avem

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}arctg\frac{1+x}{1-x}=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2}$ şi

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} arctg\frac{1+x}{1-x}=arctg(-\infty)=-\frac{\pi}{2}.$$

Am obținut că $\lim_{x\to 1} f(x)$ nu există. Deci funcția $f(x)$ în punctul $x_0=1$ nu este continuă. Prin urmare, ea nu-i nici derivabilă în acest punct, adică funcția $f(x)$ este derivabilă pe $R\setminus\{1\}$.

4. Să se determine un punct pe curba $y=\frac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$, în care tangenta la curba dată în punctul dat să fie paralelă cu dreapta $y=\frac{x}{2}$.

Rezolvare. Deoarece tangenta este paralelă cu dreapta $y=\frac{x}{2}$, rezultă că $f'(x)=\frac{1}{2}$. Rezolvând această ecuație, obținem punctele respective. Deci

$$f'(x)=\frac{(x-1)'(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2} \text{ și } f'(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x+1)^2=4\Rightarrow x+1=\pm 2\Rightarrow x_{1,2}=-1\pm 2.$$

Prin urmare, $x_1=1$, $x_2=-3$ și punctele respective sunt $(1, 0)$ și $(-3, 2)$.

5. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției $f(x)=\frac{2x}{1+x}$.

Rezolvare. Avem

$$f(x)=\frac{2x}{1+x}=\frac{2x+2-2}{1+x}=2-\frac{2}{1+x}=2-2(x+1)^{-1}.$$

Deci $f'(x)=(-2)(-1)\cdot(x+1)^{-2}=2(x+1)^{-2}$,

$f''(x)=2(-2)\cdot(x+1)^{-3}=-2\cdot 2!\cdot(x+1)^{-3}$,

$f'''=(-2)\cdot 2!\cdot(-3)\cdot(x+1)^{-4}=+2\cdot 3!\cdot(x+1)^{-4}$,

$f^{IV}(x)=2\cdot 3!\cdot(x+1)^{-5}\cdot(-4)=-2\cdot 4!\cdot(x+1)^{-5}$.

Demonstrăm prin inducție că

$$f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)^{n+1}\cdot n!\,(x+1)^{-(n+1)}.$$

Într-adevăr, se vede că pentru $n=1$ formula este justă. Presupunem că această formulă este adevărată pentru n și vom arăta că este adevărată și pentru $(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'=\left[2\cdot(-1)^{n+1}\cdot n!\,(x+1)^{-(n+1)}\right]'=$$

$$=2\cdot(-1)^{n+1}\cdot n!\left[-(n+1)\right]\cdot(x+1)^{-(n+1)-1}=$$

$$=2\cdot(-1)^{n+2}\cdot(n+1)!\,(x+1)^{-(n+2)},$$

ceea ce demonstrează formula.

6. Să se calculeze derivata funcțiilor:

a) $y=arcsin(\cos x)$, $x\neq\pi k$, $k\in Z$; b) $y=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

Rezolvare.

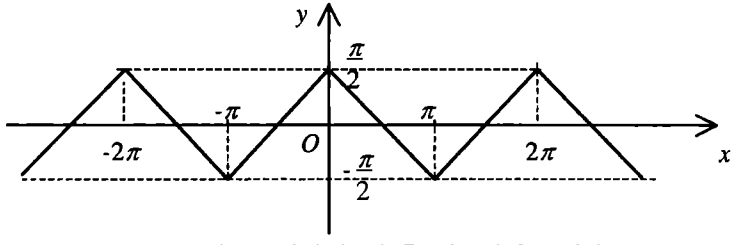
a) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot(-\sin x)=-\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

Prin urmare, funcția y este derivabilă și

1) $y'=-1$, dacă $\sin x>0$, adică $2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $k\in Z$;

2) $y'=1$, dacă $\sin x<0$, adică $\pi+2\pi k<x<2\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

Notă. Dacă $x=\pi k$, $k\in Z$, atunci funcția dată nu este derivabilă în punctele acestea, deși ea este continuă în ele. Graficul funcției are forma



b) Observăm că domeniul de definiție al funcției este $[-1, 1]$.

Deci $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot(-2x)=$

$$=\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}},\ \text{pentru } x\neq\pm1 \text{ și } x\neq0.$$

Observăm că $\lim\limits_{x\to\pm 1} y' = \pm\infty$. Rămâne să cercetăm $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{array}{c} 1-\sqrt{1-x^2} \sim \frac{1}{2}x^2 \\ \text{când} \quad x\to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{dacă } x\to 0+0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{dacă } x\to 0-0 \end{cases}.$$

Prin urmare, $f(x)$ nu este derivabilă în punctul $x_0=0$, deşi în $x_0=0$ această funcţie este continuă.

7. Să se calculeze derivata $y'(x)$ a funcţiei implicite: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Rezolvare. Derivăm ambele părţi ale relaţiei în raport cu x, ţinând cont că y este funcţie de x: $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\cdot y'=0$, de unde $y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \quad x\neq 0.$

Probleme propuse spre rezolvare

2.1. Pornind de la definiţie, să se calculeze derivata $f'(x_0)$ pentru:

a) $f(x)=\sqrt{5x+6}$, $x_0=2$; b) $f(x)=\ln(x^3+6x)$, $x_0=1$;

c) $f(x)=\sin(2x^3+1)$, $x_0=2$; d) $f(x)=tgx$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

e) $f(x)=2^x$, $x_0=3$; f) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=-1$;

g) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$; h) $f(x)=-x-ctgx$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

i) $f(x)=5\sin x+3\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$; j) $f(x)=5(tgx-x)$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

2.2. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f(x)$ în punctul x_0 pentru

a) $f(x)=e^{|x-1|}$, $x_0=1$; b) $f(x)=|x|$, $x_0=0$;

c) $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0 \\ x^2\cos\frac{1}{x}, x>0, \end{cases}$ $x_0=0$;

d) $f(x)=\begin{cases} \sin x, x\le 0 \\ \operatorname{arctg} x, x\ge 0, \end{cases}$ $x_0=0$;

e) $f(x)=|x-1|+|x+1|$, $x_0=\pm 1$;

f) $f(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ x^2\ln(1+x), x>0, \end{cases}$ $x_0=0$;

g) $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$, $x_0=0$.

2.3. Folosind formulele şi regulile de derivare, să se calculeze derivata funcției:

a) $y=2x^5+3x^4+3x^2-1$, b) $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+0{,}1x^{10}$,

c) $y=\frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}$, d) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$,

e) $y=\frac{\cos x+\sin x}{1-\cos x}$, f) $y=\frac{e^x+\sin x}{xe^x}$,

g) $y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$, h) $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$,

i) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, j) $y=arctg\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$,

k) $y=\sqrt{x}\cdot e^{\frac{x}{2}}$, l) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

m) $y=\ln arctg\sqrt{1+x^2}$, n) $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$,

o) $y=\ln(\operatorname{sh}x)+\frac{1}{2\operatorname{sh}x}$, p) $y=e^{-x}\cdot \operatorname{sh}ax$,

r) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$,

s) $y=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$,

t) $y=\ln(\operatorname{ch}x)$,

u) $y=2\sqrt{\operatorname{ch}x-1}$,

v) $y=\operatorname{sh}\frac{x}{2}+\operatorname{ch}\frac{x}{2}$,

w) $y=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 4x}$.

2.4. Folosind metoda logaritmării, să se calculeze derivata funcției:

a) $y=\frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$;

b) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$;

c) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 x$;

d) $y=x^x$;

e) $y=x^2\sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\cdot\sqrt{x-2}}}$;

f) $y=(\ln x)^{1/x}$;

g) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$;

h) $y=\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$;

i) $y=\sqrt[3]{\frac{\sin x}{1-\sin 3x}}$;

j) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$;

k) $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

l) $y=\sqrt{x\sin x\cdot\sqrt{1-e^x}}$;

m) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$;

n) $y=(\cos x)^{\sin x}$.

2.5. Să se demonstreze că

a) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ satisface relația $xy'=(1-x^2)y$;

b) $y=xe^{-x}$ satisface relația $xy'=(1-x)y$;

c) $f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$ satisface egalitatea $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$;

d) $y=\dfrac{x-e^{-x^2}}{2x^2}$ satisface relaţia $xy'+2y=e^{-x^2}$.

2.6. Să se afle A şi B, astfel încît funcţia dată să fie derivabilă în punctul dat:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, x\le 0 \\ Ax+B, x>0, \end{cases} \quad x_0=0;$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le x_0 \\ Ax+B, x>x_0, \end{cases} \quad x_0\in R;$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, |x|\ge 1 \\ Ax^2+B, |x|<1, \end{cases} \quad x_0=1;$

d) $f(x)=\begin{cases} \ln^2 x, 0<x\le e \\ Ax+B, x>e, \end{cases} \quad x_0=e.$

2.7. Să se cerceteze derivabilitatea funcţiei:

a) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$,

b) $f(x)=\begin{cases} \ln(x^2+3x), 0<x<1 \\ \frac{5}{4}(x-1)+2\ln 2, x\ge 1; \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, x<1 \\ 0, x=1 \\ \ln(x^2-2x+2), x>1; \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, x<0 \\ \ln(1+x), x\ge 0; \end{cases}$

e) $f(x)=|\ln x-1|$.

2.8. Să se calculeze $f'(x)$ sau $f'(x_0)$, dacă funcţia $y=f(x)$ este definită parametric:

a) $x=\dfrac{1}{t+1}, y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2, t\ne -1;$

b) $x=2^{-t}, y=2^{3t}, t\in R;$

c) $x = \operatorname{tg} t,\ y = \sin 2t + 2\cos 2t,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;

d) $x = \arcsin\left(t^2 - 1\right),\ y = \arccos 2t,\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$;

e) $x = t \ln t,\ y = \frac{\ln t}{t},\ t_0 = 1$;

f) $x = t\left(t\cos t - 2\sin t\right),\ y = t\left(t\sin t + 2\cos t\right),\ t_0 = \frac{\pi}{4}$;

g) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ t_0 = \frac{\pi}{6}$;

h) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

i) $x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ t = \frac{\pi}{12}$;

j) $x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t,\ t \in R^+$;

k) $x = t\left(\frac{2}{3}\sqrt{t} + 1\right),\ y = \sqrt{t} \cdot e^{\sqrt{t}},\ t \in R^+$;

l) $x = e^{-t}\sin t,\ y = e^t \cos t,\ t = 0$.

2.9. Să se demonstreze că derivata funcției $x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y = 2\operatorname{arctg}\left(t - \sqrt{1+t^2}\right)$ este egală cu 1, iar derivata funcției $x = \frac{1-t}{1+t},\ y = \frac{2t}{1+t}$ este egală cu (-1).

2.10. Să se calculeze derivata $y'(x)$ a funcției implicite:

a) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$,
b) $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{a},\ a > 0$,
c) $e^x \sin y + e^y \cos x = 0$,
d) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$,
e) $arctg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$,
f) $y^n = \frac{x+y}{x-y}$,
g) $x^n = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$,
h) $a^x - e^{x-y} = 0$,
i) $e^y = x^{x+y}$,
j) $x^y = y^x$,

k) $\cos(xy) = x$, l) $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$,

m) $y = x + \operatorname{arctg} y$, n) $x + y = e^{x-y}$.

2.11. Prin derivarea formulei $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$, să se obțină formula $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.

2.12. Să se demonstreze că:

a) derivata unei funcții pare este o funcție impară;

b) derivata unei funcții impare este o funcție pară;

c) derivata unei funcții periodice cu perioada T este o funcție periodică cu perioada T.

2.13. Să se determine coeficientul unghiular al tangentei la curba $y=f(x)$ în punctul dat:

a) $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}, x_0 = 1$; b) $y = (2x-1)(x^2 - 6x + 3), x_0 = 0$;

c) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x_0 = 1$; d) $y = \frac{1}{x} tg\frac{x}{2} + \frac{1}{x} ctg\frac{x}{2}, x_0 = \frac{\pi}{2}$;

e) $y = \ln \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{4}$; f) $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}, x_0 = 0$;

g) $y = \frac{1}{2} tg^2 x + \ln\cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$; h) $y = x^{\frac{1}{x}}, x_0 = 1$;

i) $y = arctg\frac{x+2}{1-x}, x_0 = 2$;

j) $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}, x_0 = 2$;

k) $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, t_0 = \frac{\pi}{8} \end{cases}$; l) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), t_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

m) $y^3 - 3y + 2ax = 0, x_0 = 0$; n) $e^y - xy = e, x_0 = 0$;

o) $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, x_0 = 1$.

2.14. Să se calculeze derivata funcției inverse funcției date și să se exprime $x'(y)$ în raport cu x și în raport cu y:

a) $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$; b) $y = \arcsin\sqrt{x}, x \in [0, +\infty[$;

c) $y = \operatorname{sh} x$; d) $y = \operatorname{ch} x, x \in]0, +\infty[$;

e) $y=2x^2-x, x\in\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$; f) $y=e^{\arcsin x}$;

g) $y=\frac{1-x^4}{1+x^4}$; h) $y=\arccos x^3$.

2.15. Să se calculeze derivata de ordinul n $(n\in N)$ a funcţiei:

a) $y=2x^5+3x^4+x^3-x^2+7x-9$,

b) $y=\ln x$, c) $y=3^x$, d) $y=2^x+2^{-x}$,

e) $y=e^{kx}$, f) $y=\cos^2 x$, g) $y=x^n$,

h) $y=\sin^2 x$, i) $y=xe^x$, j) $y=\frac{1}{x+2}$.

2.16. Să se calculeze derivata de ordinul trei a funcţiei date şi să se verifice rezultatul cu ajutorul formulei Leibniz:

a) $y=e^{-x}\sin x$, b) $z=x^2\ln x$, c) $z=x\cos x$,

d) $z=x^2\sin x$, e) $z=x^3e^x$, f) $z=x^2\operatorname{tg}x$.

2.17. Să se calculeze y'', dacă

a) $y=(1+4x^2)\operatorname{arctg}2x$; b) $x=\ln t, y=t^3+2t+1$;

c) $y=(x^2+1)\ln(1+x^2)$; d) $x^3y-y^2=6x$;

e) $x=3t^4-t^2, y=t^3-5$; g) $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$;

h) $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}$;

i) $x=\arccos\sqrt{t}, y=\sqrt{t}$; j) $y=-\frac{1}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$;

k) $y=\ln(x+y)$; l) $e^y=xy$; m) $x=\arcsin t, y=\ln(1-t^2)$.

2.18. Să se demonstreze că:

a) $y=e^{4x}+2e^{-1}$ satisface ecuaţia $y'''-y''-12y'=0$;

b) $y=\sin\ln x+\cos\ln x$ satisface relaţia $x^2y''+xy'+y=0$;

c) $y=e^x+2e^{2x}$ satisface relaţia $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

2.19. Să se calculeze $y''(x)$ în punctul $M(0, 1)$, dacă funcţia $y=f(x)$ este definită implicit prin ecuaţia $x^4-xy+y^4-1=0$.

2.20. Folosind regulile de derivare, să se calculeze derivata funcţiei:

a) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$, b) $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$, c) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$,

d) $y=x^{\operatorname{tg}x}$, e) $y=\sqrt[5]{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$, f) $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,

g) $y=4\ln\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2-4x}$,

h) $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)-2\operatorname{arctg}e^x$, i) $y=\frac{1}{2}tg^2x+\ln\cos x$.

2.21. Folosind formula $1+x+x^2+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x\neq 1$, şi regulile de derivare, să se calculeze sumele:

a) $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$,

b) $2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+...+n(n+1)x^n$,

c) $1^2+2^2x+3^3x^2+...+n^2x^{n-1}$.

2.22. Să se scrie ecuaţia tangentei şi ecuaţia normalei la curba $y=f(x)$ în punctul x_0:

a) $y=x^3-3x+2, x_0=2$; b) $y=x^4+3x^2-16, x_0=-2$.

2.23. Pe curba $y=x^3-5x+6$ să se afle punctele în care tangenta

a) este paralelă cu dreapta $y=-2x$;

b) este perpendiculară pe dreapta $y=-\frac{x}{7}$;

c) formează cu axa OX un unghi de $45°$.

2.24. Să se demonstreze că ecuaţia tangentei în punctul (x_0, y_0) la:

a) elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ are forma $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$;

b) parabola $y^2=2px$ are forma $yy_0=p(x-x_0)$;

c) hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ are forma $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

2.25. Să se demonstreze că:

a) tangentele la hiperbola $y=\frac{x-4}{x-2}$ în punctele ei de intersecţie cu axele de coordonate sunt paralele;

b) normala la curba $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ este tangentă la circumferinţa $x^2+y^2=a^2$.

2.26. Să se demonstreze că

a) $y=\frac{x-3}{x+4}$ satisface ecuaţia $2(y')^2=(y-1)\cdot y''$;

b) $y=\sqrt{2x-x^2}$ satisface ecuaţia $y^3y''+1=0$;

c) $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ satisface ecuaţia $xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0$;

d) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2$ satisface relaţia $\left(1+x^2\right)y''+xy'-4z=0$;

e) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{e}}$ satisface relaţia $x^3y''-xy'+y=0$.

§2. Diferenţiala funcţiei

Fie $y=f(x)$ derivabilă în punctul x_0.

Vom numi *diferenţială* a funcţiei $y=f(x)$ în punctul x_0 produsul $f'(x_0)\cdot\Delta x$. Se notează: dy, $df(x_0)$. Observăm că dacă $y=x$, atunci $dy=dx=\Delta x$ şi deci obţinem formula $dy=f'(x_0)\cdot dx$.

În multe probleme creşterea funcţiei în punctul dat este înlocuită cu diferenţiala funcţiei în acest punct, adică $\Delta y\approx dy$ sau $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$, de unde $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$. Cu cât numărul Δx este mai mic, cu atât valoarea funcţiei f în punctul $(x_0+\Delta x)$ este mai precisă.

Formula obţinută se numeşte *formula centrală* a calculului aproximativ. Remarcăm următoarele exemple:

$$\sin\Delta x\approx\Delta x,\ \operatorname{tg}\Delta x\approx\Delta x,\ \sqrt[n]{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{n}\Delta x,\ \text{dacă } \Delta x\to 0.$$

Observăm că diferenţiala funcţiei $dy=f'(x)\Delta x$ este o funcţie de x, însă de x depinde doar primul factor, deoarece al doilea factor (Δx) reprezintă creşterea variabilei independente x şi nu depinde de valoarea acestei variabile. Diferenţiala acestei funcţii ($f'(x)\Delta x$) se numeşte *diferenţială de ordinul doi* a funcţiei iniţiale $y=f(x)$. Se notează d^2y şi se calculează după formula $d^2y=f''(x)\cdot(\Delta x)^2=f''(x)\cdot(dx)^2$.

În mod analog se defineşte diferenţiala de ordinul *3*, *4* etc. În mod general diferenţiala de ordinul n a funcţiei $y=f(x)$ se notează d^ny şi se calculează după formula $d^ny=f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n$.

Diferenţiala funcţiei are următoarele proprietăţi:

$$d(u\pm v)=du\pm dv,\quad d(uv)=v\cdot du+u\cdot dv,\quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2},$$

$$d^n(u\pm v)=d^nu\pm d^nv,\quad d^n(uv)=vd^nu+nv'd^{n-1}u+...+ud^nv.$$

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze dy, d^2y şi d^3y a funcţiei $y=x(\ln x-1)$.

Rezolvare. Calculăm derivatele respective:

$$y'=\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x,\ y''=\frac{1}{x},\ y'''=-\frac{1}{x^2}.$$

Prin urmare, $dy=y'\cdot dx=(\ln x)dx$,

$$d^2y=y''\cdot(dx)^2=\frac{1}{x}\cdot(dx)^2,$$

$$d^3y=y'''\cdot(dx)^3=-\frac{1}{x^2}\cdot(dx)^3.$$

2. Să se calculeze $f(x_1)$, dacă:

a) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $x_1=0,1$;

b) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$, $x_1=0,98$;

c) $f(x)=\ln\operatorname{tg}x$, $x_1=45°15'$.

Rezolvare. Aplicăm formula

$$f(x_1)=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

a) $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left[\frac{-(x+1)+(x-1)}{(x+1)^2}\right]=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}.$

Observăm că $x_1=0,1=0+0,1$. Deci $x_0=0$ şi $\Delta x=0,1$. Prin urmare,

$$f(0,1)\approx f(0)+f'(0)\cdot\Delta x=1-\frac{2}{3}\cdot 0,1=\frac{3-0,2}{3}=\frac{2,8}{3}=0,9(3).$$

b) Avem $y'=\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+10}}$ şi $x_1=0,98=1-0,02$. Deci $x_0=1$ şi $\Delta x=-0,02$.

Prin urmare, $f(0,98)=f(1)+f'(1)\cdot(-0,02)=2-\frac{5}{4}(-0,02)=$

$=2+0,025=2,025.$

c) Avem $y'=\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$ şi

$$x_1=45°15'=45°+15'=45°+\left(\frac{15}{60}\right)^\circ=45°+\left(\frac{1}{4}\right)^\circ=$$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{720}$. Deci $x_0=\frac{\pi}{4}$ şi $\Delta x=\frac{\pi}{720}\approx 0,0044.$

Prin urmare, $f(45°15')\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\Delta x=$

$$=\ln tg\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot 0,0044=0+2\cdot 0,0044=0,0088.$$

3. Să se calculeze valoarea aproximativă a ariei cercului cu raza $R=3,02$ *m*.

Rezolvare. Avem $S=\pi R^2$. Deci $S'=2\pi R$.

Întrucât $R=3,02m=3m+0,02m$, rezultă că $R_0=3m$ şi $\Delta R=0,02m$.

Prin urmare, $S(R)=S(3,02)\approx S(2)+S'(R_0)\cdot\Delta R=\pi R_0^2+$

$+2\pi R_0\cdot\Delta R=\pi\cdot 9+2\pi\cdot 3\cdot 0,02=\pi(9+0,12)=9,12\pi\approx 28,64\ m^2).$

2.27. Să se calculeze diferențiala funcției:

a) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - 5$,

b) $y = x\text{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}$, c) $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$,

d) $y = 5^{\ln \text{tg}x}$, e) $y = \sqrt{\arcsin x} + (\text{arctg}x)^2$,

f) $y = 3^{-\frac{1}{x^2}} + 3x^3 - 4\sqrt{x}$, g) $xy + y^2 = 1$,

h) $x^3 + y^3 = y$, i) $x = y - a\sin y$,

j) $y = x\text{tg}^3 x$, k) $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$.

2.28. Să se demonstreze că:

a) $y = \frac{1 + \ln x}{x - x\ln x}$ satisface relația $2x^2 dy = (x^2 y^2 + 1)dx$;

b) $arctg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ satisface relația $x(dy - dx) = y(dy + dx)$.

2.29. Să se calculeze valoarea aproximativă a volumului unei sfere cu raza $R=2,01$ *m*.

2.30. Să se calculeze valoarea aproximativă a volumului unui cilindru circular cu înălțimea $h=1$ *m* și raza bazei $R=2,002$ *m*.

2.31. Să se calculeze:

a) $f(1,05)$, dacă $f(x)=e^{0,1x(1-x)}$; b) arctg$1,02$, arctg$0,97$;

c) arcsin$0,4983$; d) $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$;

e) $f(1,2)$, dacă $y = 3^{\frac{1}{x}} + 2^{-2x} + 6^{\sqrt{x}}$.

2.32. Cu cât crește aria unui cerc de raza $R=98,5$ *m*, dacă raza lui crește cu $0,1$ *m*?

2.33. Un rezervor cilindric cu raza de 2,7 *m* conține apă până la înălțimea de 8,2 *m*. Ce volum de lichid trebuie scos pentru ca nivelul apei să coboare cu 1,5 cm?

2.34. Cu ce eroare relativă se poate măsura raza R a unei sfere, dacă se cere ca volumul ei să fie determinat cu o exactitate de 1%?

2.35. Fie

a) $y = e^{-x^2}$, b) $y = \sin^2 2x$,

c) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, d) $y = e^{-3x}\cos 2x$,

e) $x^3 y - y^2 + 6x = 0$, f) $y = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4}\cos^2 x$,

g) $y = (2x-3)^3$, h) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$.

Să se calculeze:

a) d^2y; b) d^3y; c) d^3y; d) d^2y şi d^3y; e) d^2y în punctul $(1, 3)$; f) $d^3y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; g) d^2y şi d^3y; h) d^2y.

§3. Teoreme despre funcţii derivabile. Formula Taylor

T1 (Fermat). Fie funcţia $f(x)$ definită pe $]a, b[$ şi în $x_0 \in]a, b[$ posedă valoarea cea mai mare sau valoarea cea mai mică. Dacă în punctul x_0 există $f'(x_0)$, atunci $f'(x_0)=0$.

T2 (Rolle). Fie $y=f(x)$

a) continuă pe $[a,b]$,

b) derivabilă pe $]a,b[$,

c) $f(a)=f(b)$,

atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ în care $f'(c)=0$.

T3 (Lagrange). Fie $y=f(x)$

a) continuă pe $[a,b]$,

b) derivabilă pe $]a,b[$,

atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ astfel încît $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Cu ajutorul teoremei Lagrange se stabileşte:

1) funcţia $y=f(x)$ este constantă pe $[a, b]$ atunci şi numai atunci cînd $f'(x)=0$ pentru orice $x \in [a, b]$;

2) dacă $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci funcţia $y=f(x)$ este crescătoare (descrescătoare).

T4 (Cauchy). Fie $f(x)$ şi $g(x)$ continue pe $[a, b]$, derivabile pe $]a, b[$ şi $g'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in]a, b[$. Atunci există cel puţin un punct $c\in]a, b[$, astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

T5 (Taylor). Fie $f(x)$ posedă în punctul x_0 şi într-o vecinătate a lui derivate de ordinul $(n+1)$.

Fie x un punct arbitrar din această vecinătate şi $x\neq x_0$.

Atunci există un punct $c\in]x_0, x[$ în care are loc formula

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Ultimul termen din această formulă se numeşte restul din formula Taylor în forma Lagrange şi se notează $R_n(x)$.

Formula Taylor pentru $x_0=0$ este numită formula Mac Laurin.

Probleme rezolvate

1. Să se studieze aplicabilitatea:

a) teoremei Fermat pentru $f(x)=3x^2-1$ pe $[1, 2]$;

b) teoremei Rolle pentru $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ pe $[-1, 1]$;

c) teoremei Cauchy pentru

$f(x)=x^2-2x+3$, $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ pe $[1, 4]$.

Rezolvare.

a) Teorema Fermat nu este aplicabilă, deoarece $f(x)$ este monoton crescătoare pe $[1, 2]$ şi atinge valoarea cea mai mică în $x_1=1$, iar valoarea cea mai mare în $x_2=2$.

Observăm că $x_1=1$ şi $x_2=2$ nu sunt puncte interioare ale segmentului $[1,2]$. Printre altele, $f'(1)=6$ şi $f'(2)=12$.

b) Funcţia $f(x)$ este continuă pe $[-1, 1]$ şi $f(-1)=f(1)=0$. În punctul $x=0$ funcţia nu este derivabilă: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(0)=\infty$.

Prin urmare, teorema Rolle nu este aplicabilă.

c) Funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt continue şi derivabile pe $[1, 4]$ şi $g'(x)=3x^2-14x+20\neq 0$ $(\Delta<0)$ pentru orice $x\in[1, 4]$. Deci teorema lui Cauchy este aplicabilă. Aflăm punctul $c\in]1, 4[$:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad \frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20},$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}, \qquad 3c^2-14c+20=4c-4,$$

$$3c^2-18c+24=0, \qquad c^2-6c+8=0,$$

$$c_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1, \qquad c_1=4, \quad c_2=2.$$

Întrucât $c\in]1, 4[$, rezultă că $c=2$.

2. Fie $A(1, 1)$, $B(3, -3)$ şi $y=2x-x^2$.

Pe arcul AB al curbei $y=2x-x^2$ să se afle punctul M în care tangenta la curba dată să fie paralelă cu coarda AB.

Rezolvare. Aplicăm teorema Lagrange pentru funcţia dată pe [1, 3].

Avem $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$, adică $K_{AB}=K_{tg}$.

Deci $\frac{(2\cdot 3-9)-(2-1)}{2}=2-2c$ sau $-2=2-2c$, de unde $c=2$ şi $f(c)=0$.

Prin urmare, în punctul $M(2, 0)$ tangenta la curba dată are acelaşi coeficient unghiular cu coarda AB, adică ele sunt paralele.

3. Să se scrie formula Taylor pentru funcţia $f(x)=2^x$, considerând $n=3$ şi $x_0=2$.

Rezolvare. După formula Taylor avem

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{IV}(c)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Calculăm derivatele respective:

$f'(x)=2^x\ln 2$, deci $f'(2)=2^2\ln 2=4\ln 2$;

$f''(x)=2^x(\ln 2)^2$, deci $f''(2)=4(\ln 2)^2$;

$f'''(x)=2^x(ln2)^3$, deci $f'''(2)=4(ln2)^3$;

$f^{(IV)}(x)=2^x(ln2)^4$, deci $f^{IV}(c)=2^c(ln2)^4$;

Prin urmare,

$$2^x=4+4(\ln 2)\left[(x-2)+\frac{\ln 2}{2!}(x-2)^2+\frac{(\ln 2)^2}{3!}(x-2)^3\right]+$$

$$+\frac{1}{4!}2^c(\ln 2)^4\cdot(x-2)^4, \text{ unde } c\in]2,\ x[.$$

Probleme propuse spre rezolvare

2.36. Să se studieze aplicabilitatea teoremei Rolle pentru funcția:

a) $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ \sin x, x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$ pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

b) $f(x)=|x-1|^3$ pe $[0,\ 2]$;

c) $f(x)=\frac{5-x^2}{x^4}$ pe $[-1,1]$; d) $f(x)=x^2-1$ pe $[-1,1]$.

2.37. Utilizând teorema Lagrange, să se demonstreze următoarele relații:

a) $|\sin b-\sin a|\le b-a$;

b) $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ cu $0\le a<b<\frac{\pi}{4}$;

c) $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi$ pe $[-1,\ 0]$;

d) $\arcsin x+3\arccos x+\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}=\frac{3}{2}\pi$ pe

$\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$;

e) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}x$ pe $]0,\ +\infty[$;

f) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pe $[-1, 1]$;

g) $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x$ pe $]0, +\infty[$.

2.38. Fie $f(x)=Ax^2+Bx+C$. Să se demonstreze că punctul c din teorema Lagrange aplicată pentru $f(x)$ pe $[a, b]$ este media aritmetică a numerelor a şi b.

2.39. Să se determine valoarea lui c care intervine în teorema Cauchy în cazul funcţiilor:

a) $f(x)=\ln x, g(x)=\frac{e}{x}$ pe $[1, e]$;

b) $f(x)=\begin{cases} -x+\frac{4}{3}, x\in[0,1] \\ \frac{x^3}{3}-x^2+1, x\in[1,3] \end{cases}$, $g(x)=x$ pe $[0, 3]$.

2.40. Să se determine abscisa punctului M_0, astfel încât tangenta la curba $f(x)=\sqrt{x+1}$, $x\geq -1$, în punctul M_0 şi fie paralelă cu coarda ce uneşte punctele cu abscisele $x_1=0$ şi $x_2=3$ de pe această curbă.

2.41. Să se dezvolte polinomul $P_3(x)=x^3-2x^2+3x+5$ după puterile întregi pozitive ale binomului $(x-2)$.

2.42. Să se dezvolte polinomul $P_3(x)=2x^3-3x^2+5x+1$ după puterile naturale ale binomului $(x+1)$.

2.43. Să se scrie formula Mac Laurin de ordinul n pentru funcţia:

a) $f(x)=\sin x$,
b) $f(x)=\cos x$,
c) $f(x)=\ln(x+1), x>-1$,
d) $f(x)=\operatorname{arctg} x$,
e) $f(x)=3^x$,
f) $f(x)=e^{kx}$,
g) $f(x)=2^x+2^{-x}$,
h) $f(x)=\cos^2 x$.

2.44. Să se scrie formula Taylor pentru funcţia:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x}, x_0=1, n=4$;
b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, x_0=1, n=3$;
c) $f(x)=\operatorname{tg} x, x_0=0, n=3$;
d) $f(x)=\arcsin x, x_0=0, n=3$;

c) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $x_0=2, n=3$.

§4. Regula L'Hospital

Există nedeterminări de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (0^{0}) şi (∞^{0}).

1) Pentru a calcula nedeterminări de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ sau $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ se aplică regula L'Hospital: fie $f(x)$ şi $g(x)$ funcţii care satisfac condiţiile teoremei Cauchy (§3) într-o vecinătate a punctului x_0 (afară poate de însuşi punctul x_0) şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, apoi există şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ şi ele sunt egale.

Regula L'Hospital este valabilă şi pentru $x\to\pm\infty$ sau $x\to x_0+0$, $x\to x_0-0$.

2) Pentru a calcula nedeterminări de forma $(0\cdot\infty)$ sau $(\infty-\infty)$ ele se reduc, cu ajutorul transformărilor algebrice, la nedeterminări de forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ sau $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ şi pe urmă se aplică regula L'Hospital.

3) Nedeterminările de forma (1^{∞}), (0^{0}) sau (∞^{0}) se reduc la nedeterminări de forma $(0\cdot\infty)$. În acest caz se aplică metoda logaritmării sau transformarea elementară $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$. Apoi (vezi p. 2) se aplică regula L'Hospital.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n}}{e^{x}}, n\in N$,

d) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^n \cdot \ln x, n \in N$, e) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Rezolvare.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \dfrac{2}{1} = 2.$

În cazul dat am aplicat de trei ori consecutiv regula L'Hospital pentru nedeterminarea de forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$= \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2\cos 3x(-\sin 3x)3}{2\cos x(-\sin x)} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3\sin 6x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 6x}{\sin 2x} =$

$= \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = 3\dfrac{\cos 3\pi}{\cos \pi} = 3.$

Aşadar, am aplicat regula L'Hospital de trei ori pentru nedeterminări de forma $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ şi $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} = n \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{n-1}}{e^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$= n(n-1) \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{n-2}}{e^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \ldots = \left[n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\right] \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{e^x} =$

$= n! \cdot 0 = 0.$

Deci am aplicat regula L'Hospital de n ori $(n \in N)$ pentru nedeterminarea de forma $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

d) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^n \cdot \ln x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{x^{-n}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\frac{1}{x}}{(-n)x^{-n-1}} =$

$= -\dfrac{1}{n} \lim\limits_{x\to 0+0} x^n = \left(-\dfrac{1}{n}\right)\cdot 0 = 0.$

După cum vedem, am transformat nedeterminarea de forma $(0\cdot\infty)$ în nedeterminare de forma $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, apoi am aplicat regula L'Hospital.

e) *Metoda 1.* $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = (0^0) = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x} =$

$= (0\cdot\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-1}}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0+0} x} = e^0 = 1.$

Efectuând transformarea elementară $\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, am obținut nedeterminarea $(0\cdot\infty)$ și apoi am aplicat punctul 2).

Metoda 2. Notăm $y=x^x$. Logaritmăm ambele părți în baza e: $\ln y = x\ln x$. Trecem la limită:

$$\lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} (x\cdot \ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} =$$

$= -\lim\limits_{x\to 0+0} x = 0.$ Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln y = 0$ sau $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0+0} y\right) = 0,$ adică $\lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0} x^x = e^0 = 1.$ Am folosit metoda logaritmării și apoi am aplicat punctul 2).

2. Să se demonstreze că regula L'Hospital nu poate fi aplicată la funcțiile $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x}, & dacă \quad x \neq 0 \\ 0, & dacă \quad x = 0 \end{cases}$ și $g(x) = \sin x$ în vecinătatea punctului $x=0$.

Rezolvare. Într-adevăr, în vecinătatea punctului $x_0=0$ funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ satisfac condiţiile teoremei Cauchy şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Observăm că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot\cos\frac{1}{x} + x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\cos x}\cdot\cos\frac{1}{x} +$$

$$+ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\sin\frac{1}{x} = 0 + 1\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

Această limită nu există (a se consulta exemplul rezolvat 2a de la pag. 30, cap.1, §3).

Prin urmare, regula L'Hospital nu poate fi aplicată la aceste două funcţii, deşi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ există şi este egală cu

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos\frac{1}{x}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$ (produsul unei funcţii infinit mică la o funcţie mărginită este o funcţie infinit mică).

Probleme propuse spre rezolvare

2.45. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{e^{2\sin x}-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$,

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{e^x}-1}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3xe^{x}+3x^{2}}{\operatorname{arctg}x-\sin x-\dfrac{x^{3}}{6}}$,

k) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^{x}-e^{a}\right)}$,

l) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$,

m) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$,

n) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$,

o) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$,

p) $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{x}{a}\right)}{ctg\dfrac{\pi x}{a}}$, $a>0$.

2.46. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^{2}-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^{2}}-\dfrac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{2}\sec x\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x-1}{2x^{2}}+\dfrac{1}{x\left(e^{2x}-1\right)}\right]$,

f) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$,

g) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$,

h) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{x^{2}-a^{2}}{x^{2}}\cdot tg\dfrac{\pi x}{2a}\right]$,

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\sec\dfrac{\pi}{2}x\cdot\ln\dfrac{1}{x}\right]$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(1+\sin^{2}x\right)\cdot ctg\ln^{2}(1+x)\right]$,

k) $\lim\limits_{x\to a}\left[\arcsin\dfrac{x-a}{a}ctg(x-a)\right]$,

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\pi-2\operatorname{arctg}x\right)\cdot\ln x$,

m) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$,

n) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(ch\frac{a}{x}-1\right)$, o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x}{\operatorname{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right]$,

p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$, r) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$.

2.47. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$, b) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$, f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$,

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$, h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$, i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$,

j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$, k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$, l) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\sin x}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, n) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$, p) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$.

§5. *Extremele funcţiei*

Fie funcţia $y=f(x)$ derivabilă pe $[a,b]$. Cu ajutorul teoremei Lagrange (§3) poate fi demonstrat următorul criteriu: pentru ca funcţia $y=f(x)$ să fie nedescrescătoare (necrescătoare) pe $[a,b]$ este necesar şi suficient ca $f'(x)\geq 0$ (respectiv $f'(x)\leq 0$) pentru orice $x\in[a,b]$.

Punctul x_0 se numeşte *punct de maxim (minim)* al funcţiei $y=f(x)$, dacă există o vecinătate a lui x_0 astfel încît pentru orice valoare a lui x din această vecinătate se satisface inegalitatea $f(x)\leq f(x_0)$ (respectiv: $f(x)\geq f(x_0)$). Maximul (max) şi minimul (min) funcţiei *f(x)* se mai numesc *extremele* ei.

Punctele care verifică ecuaţia $f'(x)=0$ se numesc *puncte staţionare*. Punctele care verifică ecuaţiile $f'(x)=0$ sau $f'(x)=\infty$ sau $f'(x)$ nu există se numesc *puncte critice*.

Condiţia necesară de existenţă a extremului: dacă funcţia $y=f(x)$ admite un extrem în punctul x_0 şi este definită într-o vecinătate a lui, atunci $f'(x_0)=0$ sau $f'(x_0)=\infty$, sau $f'(x_0)$ nu există (a se consulta exemplul rezolvat 2(a, b, c) şi exemplul 2.50 d), f)).

Condiţiile suficiente de existenţă a extremului sunt următoarele.

1) Fie $y=f(x)$ continuă într-o vecinătate a punctului critic x_0. Dacă trecând prin x_0 de la stânga la dreapta derivata $f'(x)$ îşi schimbă semnul plus în minus, atunci x_0 este punct de maxim. Dacă însă la trecerea de la stînga la dreapta prin x_0 derivata $f'(x)$ îşi schimbă semnul minus în plus, atunci x_0 este punct de minim.

2) Fie $f'(x_0)=0$, iar $f''(x_0)\neq 0$. Atunci punctul x_0 este punct de maxim, dacă $f''(x)<0$ şi punct de minim, dacă $f''(x_0)>0$.

3) Fie $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, iar $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Dacă n este număr par, atunci x_0 este punct de minim când $f^{(n)}(x_0)>0$ şi punct de maxim când $f^{(n)}(x_0)<0$. Dacă însă n este număr impar, atunci funcţia $f(x)$ nu are extreme în x_0.

Pentru a calcula valoarea cea mai mare $Sup_{[a,b]}f(x)$ sau valoarea cea mai mică $Inf_{[a,b]}f(x)$ a funcţiei $f(x)$ pe $[a,b]$ trebuie de aflat cea mai mare sau cea mai mică valoare dintre toate valorile funcţiei $f(x)$ în punctele ei critice, ce aparţin segmentului $[a,b]$, şi $f(a), f(b)$.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\ln(1+x)\geq\frac{arctg\,x}{1+x},\quad x\in[0,+\infty[.$$

Rezolvare. Deoarece $x \geq 0$, rezultă că $1+x>0$ şi inegalitatea dată este echivalentă cu inegalitatea

$(1+x)\ln(1+x) \geq arctg\, x$ pe $[0,+\infty[$.

Considerăm funcţia $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-arctg\, x$.

Observăm că $f(x)$ este nedescrescătoare pe $[0,+\infty[$, deoarece

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=$$

$$=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}\geq 0 \text{ pe } [0,+\infty[.$$

Prin urmare, inegalitatea $x \geq 0$ implică inegalitatea $f(x) \geq f(0)$, adică $(1+x)\ln(1+x)-arctg\, x \geq 0$ sau $(1+x)\ln(1+x) \geq arctg\, x$, . ceea ce demonstrează inegalitatea iniţială.

2. Să se determine punctele extreme pentru următoarele funcţii:

a) $y=x\sqrt{1-x^2}$, b) $y=(x-1)^4$, c) $y=1+(x-2)^{\frac{4}{5}}$.

Rezolvare.

a) Funcţia $y=x\sqrt{1-x^2}$ este definită pe $[-1,1]$. Calculăm $f'(x)$ şi $f''(x)$:

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$f''(x)=\frac{-4x\sqrt{1-x^2}-(1-2x^2)(-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{-4x+4x^3+x-2x^3}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Aflăm punctele critice:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-2x^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$f'(x)=\infty \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x_{3,4}=\pm 1.$

Întrucât $f''(x_1)=f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0,$ rezultă că $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ este punct de maxim. Observăm că $f''(x_2)=f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0.$ Deci $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ este punct de minim. Avem

$$y_{max}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2} \text{ şi } y_{min}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Punctele critice $x_{3,4}=\pm 1$ nu pot fi puncte de extrem ale funcţiei date, deoarece punctele de extrem, prin definiţie, sunt puncte interioare ale domeniului de definiţie al funcţiei.

b) $f'(x)=4(x-1)^3$. Funcţia are un singur punct staţionar: $x_1=1$. Observăm că

$f''(x)=12(x-1)^2$ şi $f''(1)=0,$

$f'''(x)=24(x-1)$ şi $f'''(1)=0,$

$f^{IV}(x)=24$ şi $f^{IV}(1)=24>0.$

Prin urmare, funcţia dată are punct de minim în punctul $x_1=1$ şi $y_{min}=0$.

c) $f'(x)=\frac{4}{5}(x-2)^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}.$

Funcţia $f(x)$ nu are puncte staţionare. Dacă $f'(x)=\infty$, atunci $x_1=2$. Cercetăm semnul derivatei $f'(x)$ la stânga şi la dreapta punctului $x_1=2$. Observăm că la stânga de $x_1=2$ derivata are semnul minus $\left(f'\left(\frac{3}{2}\right)<0\right)$, iar la dreapta de $x_1=2$ derivata are semnul plus $\left(f'\left(\frac{5}{2}\right)>0\right)$.

Prin urmare, punctul $x_1=2$ este punct de minim şi $y_{min}=f(2)=1$.

3. Să se afle extremele funcției:

a) $y=\frac{1}{\sqrt{x^4-8x^2+25}}$, b) $\begin{cases} x=t^5-5t^3-20t+7 \\ y=4t^3-3t^2-18t+3 \end{cases}$, $t\in]-2,2[$.

Rezolvare.

a) În cazul de față este mai simplu de procedat astfel: considerăm funcția $f_1(x)=x^4-8x^2+25$.

Cercetăm extremele funcției $f_1(x)$:

$f_1'(x)=4x^3-16x$ și $f_1''(x)=12x^2-16$.

Funcția $f_1(x)$ are următoarele puncte staționare:

$f_1'(x)=0\Rightarrow 4x(x^2-4)=0\Rightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm 2$.

Observăm că

1) $f_1''(x_1)=f_1''(0)<0$. Deci $x_1=0$ este punct de maxim pentru $f_1(x)$;

2) $f_1''(x_{2,3})=f_1''(\pm 2)>0$. Deci punctele $x_{2,3}=\pm 2$ sunt puncte de minim pentru funcția $f_1(x)$.

Prin urmare, pentru funcția inițială $y=\frac{1}{\sqrt{f_1(x)}}$ avem:

1) punctul $x_1=0$ este punct de minim pentru funcția y și $y_{min}=\frac{1}{\sqrt{f_1(0)}}=\frac{1}{5}$;

2) punctele $x_{2,3}=\pm 2$ sunt puncte de maxim pentru funcția y și $y_{max}=\frac{1}{\sqrt{f_1(\pm 2)}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$.

b) Avem $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}$. Deci punctele critice ale funcției date sunt soluțiile ecuațiilor $x_t'=0, y_t'=0$. Observăm că $x_t'=5t^4-15t^2-20=5(t^4-3t^2-4)=5(t^2+1)(t^2-4)$. Deci $x_t'=0\Rightarrow t_{1,2}=\pm 2\notin]-2,2[$;

$y_t' = 12t^2 - 6t - 18 = 6(2t^2 - t - 3)$ şi

$y_t' = 0 \Rightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -1 \in]-2,2[,\ t_2 = \frac{3}{2} \in]-2,2[.$

Prin urmare, funcţia iniţială are două puncte staţionare

$t_1 = -1 (x_1 = 31)$ şi $t_2 = \frac{3}{2}\left(x_2 = -\frac{1033}{32}\right)$.

Cercetăm semnul derivatei a doua în punctele t_1 şi t_2:

$y_x'' = \frac{y_t''x_t' - x_t''y_t'}{(x_t')^3} = \frac{y_t''}{(x_t')^2} - y_t' \frac{x_t''}{(x_t')^3}$.

Deoarece termenul al doilea din y_x'' în punctele t_1 şi t_2 se anulează $(y_t'(t_1) = y_t'(t_2) = 0!)$, rezultă că semnul y_x'' în x_1 şi x_2 coincide cu semnul y_t'' în t_1 şi t_2.

Aflăm $y_t'' = (y_t')_t' = [6(2t^2 - t - 3)]_t' = 6(4t - 1).$

Deci $y_t''(t_1) = y_t''(-1) < 0$ şi $y_t''(t_2) = y_t''\left(\frac{3}{2}\right) > 0.$

Prin urmare, funcţia dată are
maxim în $t_1 = -1\ (x_1 = 31)$ cu $y_{max} = y_t(-1) = 14$ şi
minim în $t_2 = \frac{3}{2}\left(x_2 = -\frac{1033}{32}\right)$ cu $y_{min} = y_t\left(\frac{3}{2}\right) = -17,25.$

4. Să se descompună numărul $m>0$ în doi termeni astfel încât produsul lor să fie cel mai mare.

Rezolvare. Fie $m=x+y$. Deci $xy=x(m-x)=f(x)$ reprezintă o funcţie în raport cu x. Cercetăm funcţia $f(x)=x(m-x)$ la extrem: $f'(x) = m - 2x$. Punctele staţionare sunt $f'(x) = 0$, de unde $x_1 = \frac{m}{2}$.

Observăm că $f''(x) = -2 < 0$. Prin urmare, punctul $x = \frac{m}{2}$ este punct de maxim pentru funcţia $f(x) = x(m - x.)$ Aceasta înseamnă că produsul termenilor va fi cel mai mare atunci când ei sunt egali. Să se rezolve problema prin metoda grafică.

2.48. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $arctg\, x \le x - \frac{x^3}{6}$ pe $[0,1]$,

b) $\sqrt[3]{(1+x)^2} \le 1 + \sqrt[3]{x^2}$ pe $[0,+\infty[$,

c) $tg\, x \ge x + \frac{x^3}{3}$ pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

d) $e^x \ge 1 + x$ pe $[0,+\infty[$,

e) $\frac{x}{1+x^2} \le arctg\, x$ pe $[0,+\infty[$,

f) $\sin x + tg\, x \ge 2x$ pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

g) $1 + x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \ge \sqrt{1+x^2}$ pe $[0, +\infty[$.

2.49. Să se afle parametrul A astfel încât:

a) funcția $y=x^3-Ax$ să fie monoton nedescrescătoare pe R;

b) funcția $y=\sin x-Ax+2$ să fie monoton necrecscătoare pe R.

2.50. Să se afle extremele funcției:

a) $y = 2x^6 - x^3 + 3$, b) $y = 2\cos x - x^2$,

c) $y = (x-5)e^x$, d) $y = (x-2)^{\frac{2}{7}}(2x+1)$,

e) $y = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in [0,2\pi]$, f) $y=|x|$;

g) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, h) $y = x^4 - 2x^3$,

i) $y = x - tg\, x$, j) $y = x + \frac{1}{x}$, $x \ne 0$,

k) $y = x\sqrt{1-x}$, $x \le 1$, l) $y = x \ln x$, $x > 0$,

m) $y = \ln x - arctg\, x$, $x > 0$, n) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

2.51. Să se afle extremele funcției:

a) $y = \frac{50}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60}$, b) $y = \sqrt[5]{e^{x^2} - 1}$;

c) $y=\dfrac{16}{4x^3-15x^2-18x+1}$, d) $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$,

e) $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t^3-3t \end{cases}$, $t\in\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$, f) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2+1} \\ y=\dfrac{t^3+2}{t^2+1} \end{cases}$, $t\in\left[\dfrac{1}{3},\ 2\right]$.

2.52. Să se calculeze valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică a funcţiei:

a) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ pe $[0,\ 4]$, b) $y=x^4-2x^2+3$ pe $[-3,\ 2]$,

c) $y=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ pe $[-1,\ 1]$,

d) $y=arctg\,x-\dfrac{1}{2}\ln x$ pe $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$,

e) $y=2\sin x+\sin 2x$ pe $\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$,

f) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$ pe $[-2,\ 4]$,

g) $y=|x|$ pe $[-1,\ 1]$,

h) $y=E(x)$ – partea întreagă a lui x pe $[-2,1]$.

2.53. Să se demonstreze că funcţia $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nu are extreme pentru orice valori $a,\ b,\ c,\ d$.

2.54. Fie $f(x)=x^2+px+q$. Să se determine p şi q astfel încât $x_0=3$ să fie punct de minim pentru $f(x)$.

2.55. Să se afle A astfel încât punctul $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ să fie punct de maxim pentru funcţia $f(x)=A\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

2.56. Să se afle A şi B astfel încât punctele $x_1=1$ şi $x_2=2$ să fie puncte de extrem pentru funcţia $f(x)=A\ln x+Bx^2+x$.

2.57. Diferența a două numere este egală cu 7. Să se afle numerele acestea astfel încât produsul lor să fie cel mai mic.

2.58. Să se afle dimensiunile unui dreptunghi cu perimetrul 20 și aria cea mai mare.

2.59. Să se afle catetele triunghiului dreptunghic cu aria cea mai mare, dacă ipotenuza lui este egală cu c.

2.60. Să se demonstreze că din toate dreptunghiurile înscrise în cercul dat pătratul are aria cea mai mare. Va avea oare pătratul și cel mai mare perimetru?

2.61. Să se arate că din toate triunghiurile isoscele înscrise în cercul dat triunghiul echilateral are cel mai mare perimetru.

2.62. Să se afle înălțimea cilindrului drept cu cea mai mare suprafață laterală, care poate fi înscris într-o sferă de rază R.

2.63. Să se afle înălțimea cilindurului drept cu cel mai mare volum, care poate fi înscris într-o sferă de raza R.

2.64. Să se construiască un vas cilindric deschis deasupra, cu pereții și fundul de grosimea dată d și de capacitatea dată $V = \pi a^3$, astfel încât să se întrebuințeze o cantitate minimă de material.

2.65. Să se reprezinte numărul 8 în forma de sumă de doi termeni astfel încât suma cuburilor lor să fie cea mai mică.

2.66. Să se afle numărul pozitiv m astfel încât suma $m+\frac{1}{m}$ să fie cea mai mică.

2.67. Să se afle înălțimea conului cu cel mai mic volum care poate fi circumscris unei semisfere de raza R. Planul bazei conului coincide cu planul bazei semisferei.

2.68. Dintr-o foaie de tablă în formă de pătrat cu latura d decupăm la vârfuri pătrate egale și îndoim marginile sub un unghi de $90°$. Obținem o cutie deschisă de forma unui paralelipiped. Care trebuie să fie lungimea laturii pătratelor decupate pentru ca cutia să aibă volumul cel mai mare?

§6. Concavitate şi convexitate. Asimptote

Fie $y=f(x)$ derivabilă pe $]a, b[$. Atunci există tangenta la curba $y=f(x)$ în orice punct $x \in]a,b[$.

Vom spune că curba $y=f(x)$ este *concavă* sau *convexă în jos* [respectiv *convexă* sau *convexă în sus*] pe $]a,b[$, dacă toate punctele curbei sunt situate mai sus (respectiv mai jos) faţă de tangenta dusă în orice punct al acestui interval [1, 3, 16].

Punctul $x_0 \in]a,b[$ se numeşte *punct de inflexiune* al funcţiei $y=f(x)$, dacă el separă partea concavă de cea convexă sau invers. Evident, tangenta în punctul de inflexiune, dacă ea există, intersectează curba, deoarece de o parte a acestui punct curba este situată sub tangentă, iar de cealaltă parte deasupra ei.

Pentru ca curba $y=f(x)$ să fie concavă (convexă) pe $]a, b[$ este necesar şi suficient ca $f''(x) \geq 0$ (respectiv $f''(x) \leq 0$) pentru orice $x \in]a,b[$. Evident, dacă x_0 este un punct de inflexiune pentru curba $y=f(x)$ şi funcţia $f(x)$ posedă în x_0 derivată de ordinul doi continuă, atunci $f''(x_0)=0$. Are loc şi afirmaţia: dacă $f'(x_0)=0$ sau $f'(x_0) \infty$ şi la trecerea prin punctul x_0 derivata $f''(x)$ îşi schimbă semnul, atunci x_0 este punct de inflexiune pentru $y=f(x)$ (a se consulta exemplul 2.69 a), b)).

Dreapta l se numeşte *asimptotă* a curbei $y=f(x)$, dacă distanţa de la punctul variabil al curbei până la această dreaptă tinde către zero, de îndată ce punctul variabil se îndepărtează pe curbă spre infinit.

Deosebim asimptote *verticale* şi *oblice*. Din definiţia asimptotei rezultă că dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, sau $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, atunci dreapta $x=x_0$ este asimptotă verticală la curba $y=f(x)$ şi invers, dacă dreapta $x=x_0$ este asimptotă a funcţiei $y=f(x)$, atunci cel puţin una din egalităţile de mai sus este verificată.

Pentru a afla asimptota oblică $y=kx+b$ a curbei $y=f(x)$, folosim formulele: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ şi $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right]$.

Probleme rezolvate

1. Să se afle intervalele de concavitate şi convexitate şi punctele de inflexiune ale curbei (funcţiei): $y = \frac{x^3}{x^2+3}$.

Rezolvare. Avem $y' = \frac{3x^2(x^2+3) - 2x(x^3)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}$;

$$y'' = \frac{(4x^3+18x)(x^2+3)^2 - 2(x^2+3)2x(x^4+9x^2)}{(x^2+3)^4} = \frac{54x-6x^3}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{6x(9-x^2)}{(x^2+3)^3}.$$

Observăm că ecuaţia $y''(x) = \infty$ nu are soluţii, iar ecuaţia $y''(x) = 0$ are soluţiile: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 3$.

Cercetăm semnul derivatei $f''(x)$ în vecinătatea acestor puncte:

a) $x_1 = 0$: $f''(0-0) < 0$, $f''(0+0) > 0$,

b) $x_2 = -3$: $f''(-3-0) > 0$, $f''(-3+0) < 0$,

c) $x_3 = 3$: $f''(3-0) > 0$, $f''(3+0) < 0$.

Prin urmare, punctele $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 3$ sunt puncte de inflexiune pentru curba $y=f(x)$. Funcţia dată este concavă pe intervalul $]-\infty, -3[\ U \ ]0, 3[$ şi convexă pe intervalul $]-3, 0[\ U \ ]3, +\infty[$.

2. Să se determine asimptotele funcţiei $y = \sqrt{1+x^2} + 2x$.

Rezolvare. Funcţia dată nu are puncte de discontinuitate. Deci asimptote verticale nu sunt. Pentru a afla asimptota oblică, folosim formulele indicate:

$$k_1 = \lim_{x->+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim_{x>+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right)}{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right)=1+2=3;$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=$$

$$(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{\infty}=0;$$

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x}{x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right)=-1+2=1;$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Prin urmare, graficul funcţiei $y=\sqrt{1+x^2}+2x$ are două asimptote oblice: $y=3x$, când $x\to+\infty$ şi $y=x$, când $x\to-\infty$.

Probleme propuse spre rezolvare

2.69. Să se afle intervalele de concavitate şi convexitate şi punctele de inflexiune ale funcţiei:

a) $y=(x-4)^5+4x+4$, b) $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$,

c) $y=x^4-8x^3+24x^2$, d) $y=x^2\ln x+1$,

e) $y=x^4+2x^3-12x^2-5x+2$, f) $y=xe^{2x}+1$,

g) $y=x^2+2\sin x$, h) $y=e^{\sin x}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}.\right]$

2.70. Să se determine A şi B astfel încât punctul (1,3) să fie punct de inflexiune pentru funcţia $f(x)=Ax^3+Bx^2$.

2.71. Să se calculeze h astfel încât punctele $x_{1,2} = \pm\delta$ să fie puncte de inflexiune pentru funcția Gauss

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, \quad (h > 0).$$

2.72. Să se determine relația dintre coeficienții a, b, c astfel încât funcția $f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + 10x + 2$ să posede puncte de inflexiune.

2.73. Pentru care valori ale coeficientului a graficul funcției $f(x) = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ este concav pe R?

2.74. Să se demonstreze că cele trei puncte de inflexiune ale curbei $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ aparțin unei drepte.

2.75. Să se afle asimptotele funcției:

a) $y = \frac{x^2+1}{1+x}$, b) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$, c) $y = e^{-x}\sin 2x + x$,

d) $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$, e) $y = x e^{\frac{1}{x}}$, f) $y = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$,

g) $y = \frac{1}{x-1}$, h) $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$, i) $y^3 = 6x^2 + x^3$,

j) $y^2 = \frac{x^3 - a^3}{x^3 + a^3}$, k) $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x-3}$, l) $y = x\,arctg\,x$,

m) $y = x + \frac{\sin x}{x}$, n) $y = \ln(4 - x^2)$,

o) $y = 2x - arccos\frac{1}{x}$, p) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

2.76. Să se demonstreze că graficul funcției $P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m (m \geq 2, m \in N)$ nu are asimptote.

§7. Studiul funcției și construirea graficului ei

În continuare vom folosi metodele expuse în paragrafele precedente (§1 – §6), pentru a cerceta comportamentul funcției și trasarea graficului ei.

Propunem următorul plan de cercetare al funcției și de construire a graficului ei:

I

a) Aflarea domeniului de existență al funcției;

b) Paritatea și periodicitatea funcției;

c) Punctele de discontinuitate. Asimptote verticale și oblice. Comportamentul funcției la infinit;

d) Punctele de intersecție ale funcției cu axele de coordonate;

II

a) Intervalele de creștere și de descreștere ale funcției;

b) Punctele de maxim și de minim precum și valorile maxime și minime ale funcției;

III

a) Intervalele de concavitate și convexitate;

b) Punctele de inflexiune;

IV

În baza cercetărilor efectuate mai sus se construiește graficul funcției.

Dacă funcția este pară, atunci este suficient de a cerceta funcția și a construi graficul ei pentru valorile pozitive ale argumentului ce aparțin domeniului de definiție al funcției. Pentru valorile negative ale argumentului graficul funcției se construiește în baza faptului că graficul funcției pare este simetric în raport cu axa ordonatelor.

Dacă funcția este impară, atunci graficul ei este simetric în raport cu originea de coordonate.

Dacă funcția este periodică cu perioada $2T$, atunci este suficient de a cerceta funcția și de a construi graficul ei pe $[-T, T]$.

Probleme rezolvate

1. Să se cerceteze funcția $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ și să se construiască graficul ei.

Rezolvare.

I. a) Domeniul D de definiţie este $x \neq \pm 1$ sau $]-\infty,-1[U]-1,1[U]1,+\infty[$.

b) Deoarece $f(-x)=-f(x)$, rezultă că funcţia este impară. Deci, graficul ei este simetric în raport cu originea coordonatelor. Funcţia nu este periodică.

c) Funcţia are două puncte de discontinuitate de speţa 2: $x_1=-1$, $x_2=1$. Prin urmare, funcţia are două asimptote verticale: $x=-1$, $x=1$. Observăm că $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=+\infty$.

Aflăm asimptotele oblice:

$$k=\lim_{x->\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x->\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x->\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x->\pm\infty}\frac{1}{1-0}=1,$$

$$b=\lim_{x->\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x->\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x->\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x->\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0.$$

Deci asimptota oblică are ecuaţia $y=x$.

d) Dacă $x=0$, atunci $y=0$ şi reciproc: $y=0\Rightarrow x=0$. Funcţia intersectează axele de coordonate într-un singur punct – originea coordonatelor.

II. a) Avem $y'=\dfrac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

Rezolvăm ecuaţia $y'(x)=0$. Obţinem $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. Observăm că $y'(x)=\infty$ implică $x_{4,5}=\pm 1\notin D$. Cercetăm semnul derivatei $f'(x)$ în vecinătatea punctelor staţionare. Avem

$x_1=0$: $f'(0-0)<0$ şi $f'(0+0)<0$;

$x_2 = -\sqrt{3}$: $f'(-\sqrt{3}-0) > 0$ şi $f'(-\sqrt{3}+0) < 0$;

$x_1 = \sqrt{3}$: $f'(\sqrt{3}-0) < 0$ şi $f'(\sqrt{3}+0) > 0$.

Deci pe intervalul $]-\infty,-\sqrt{3}[U]\sqrt{3},+\infty[$ funcţia creşte, iar pe intervalul $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$ funcţia descreşte.

b) Evident că $x = \sqrt{3}$ este un punct minim cu $y_{min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$, iar $x = -\sqrt{3}$ este un punct maxim cu $y_{max} = f\left(-\sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6.\right)$

III. a) Avem $y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} =$

$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

Observăm că ecuaţia $y''(x) = 0$ are soluţia $x_1 = 0$, iar ecuaţia $y''(x) = \infty$ are soluţiile $x_{2,3} = \pm 1 \notin D$.

Cercetăm semnul derivatei $f''(x)$ în vecinătatea punctelor $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -1$; şi $x_5 = 1$:

$x_1 = 0$: $f''(0-0) > 0$ şi $f''(0+0) < 0$;

$x_2 = -\sqrt{3}$: $f''(-\sqrt{3}-0) < 0$ şi $f''(-\sqrt{3}+0) < 0$;

$x_3 = \sqrt{3}$: $f''(\sqrt{3}-0) > 0$ şi $f''(\sqrt{3}+0) > 0$;

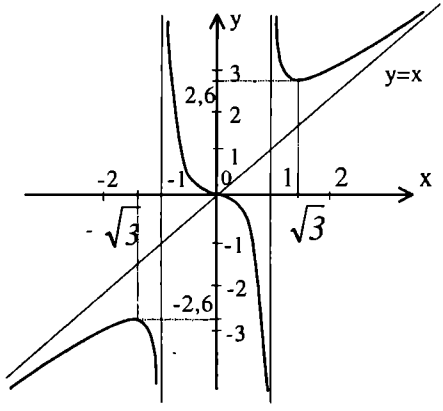
$x_4 = -1$: $f''(-1-0) < 0$ şi $f''(-1+0) > 0$;

$x_5 = 1$: $f''(1-0) < 0$ şi $f''(1+0) > 0$.

Prin urmare, funcţia este concavă pe intervalul $]-1,0[U]1,+\infty[$ şi convexă pe intervalul $]-\infty,-1[U]0,1[$.

b) Evident, punctul (0,0) este un punct de inflexiune.

IV. Pe baza "informației" obținute despre funcția $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ în I-III trasăm graficul ei.



Probleme propuse spre rezolvare.

2.77. Să se cerceteze funcția și să se construiască graficul ei:

a) $y = \frac{x^2}{x+1}$, b) $y = x\,e^x$, c) $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$,

d) $y = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$, e) $y = arctg\,2x - arctg\,x$, f) $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$,

g) $y = \frac{(x+3)^2}{x-4}$, h) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, i) $y = x + \ln(x^2 - 1)$,

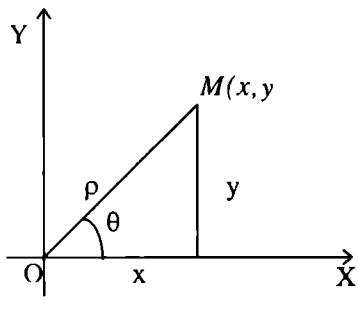
j) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$, k) $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$, l) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

Capitolul 3

NUMERE COMPLEXE. POLINOAME

§ 1. Numere complexe

Se numeşte *număr complex* z expresia de forma $x+iy$, unde $x, y \in R$, iar $i=\sqrt{-1}$. Numărul real x se numeşte *partea reală* a lui z şi se notează *Re z; y* se numeşte *partea imaginară* a lui z şi se notează Im z. Dacă $x=0$, numărul iy se numeşte *pur imaginar*. Numerele complexe de forma $x+iy$ şi $\bar{z}=x-iy$ se numesc *conjugate*. Două numere complexe $z_1=x_1+iy_1$ şi $z_2=x_2+iy_2$ se numesc *egale*, dacă părţile lor reale şi imaginare sunt *egale*, adică $x_1=x_2$ şi $y_1=y_2$. Consemnăm că în mulţimea numerelor complexe nu este definită relaţia de ordine (mai mare sau mai mic). Orice număr complex $z=x+iy$ poate fi reprezentat geometric printr-un punct $M(x, y)$ cu coordonatele x şi y în planul XOY sau prin raza vector $\vec{OM}=\{x, y\}$ cu coordonatele x şi y.



Să notăm prin θ şi $\rho(\rho \geq 0)$ coordonatele polare ale punctului $M(x, y)$. Considerând originea sistemului cartezian rectangular de coordonate XOY ca pol, iar direcţia pozitivă a axei OX ca axă polară obţinem următoarele ega-lităţi: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Prin urmare, numărul complex $z=x+iy$ poate fi reprezentat sub forma:

$$z=x+iy=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Forma aceasta se numeşte formă *trigonometrică* a lui z, spre deosebire de forma $x+iy$, care se numeşte formă *algebrică*. Numărul ρ se numeşte *modulul* lui z, iar unghiul

θ – *argumentul* lui $z(-\pi < \theta \le \pi)$. Se notează astfel: $\rho = |z|, \theta = \arg z$. Menţionăm că ρ şi θ se exprimă prin x şi y astfel: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\theta = arg\, z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & dacă \quad x > 0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & dacă \quad x < 0;\ y \ge 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & dacă \quad x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & dacă \quad x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & dacă \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Numerele complexe conjugate au acelaşi modul: $|z| = |\bar{z}|$, iar argumentele lor sunt egale în valoare absolută, însă diferă prin semn: $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$, şi $z_2 = x_2 + iy_2$. Atunci

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Prin urmare, *a aduna (a scădea) două numere complexe în formă algebrică înseamnă a aduna* (a scădea) *părţile lor reale şi imaginare.*

A înmulţi două numere complexe în formă algebrică înseamnă a le înmulţi ca două binoame după regulile algebrice, luând în considerare că $i^2 = -1$.

În general, avem următoarele formule de înmulţire cu i: $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = i^2 = -1$, $i^{4k+3} = i^3 = -i$, $i^{4k} = 1$ pentru orice număr $k \in N$.

Dacă numerele complexe sunt date în formă trigonometrică, adică $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, atunci

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right].$$

Prin urmare, la înmulțirea a două numere complexe în formă trigonometrică, modulele se înmulțesc, iar argumentele se adună.

Formula Moivre reprezintă un caz particular de înmulțire a numerelor complexe: $z^n = \rho^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$, $n \in N$.

Evident, $z+\bar{z}=2x$, $z-\bar{z}=2yi$, $z\bar{z}=x^2+y^2=\rho^2=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

Fie $z_1=x_1+iy_1$ şi $z_2=x_2+iy_2\neq 0$. Atunci

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

Dacă însă $z_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ şi

$z_2=\rho_2(cos\theta_2+i\,sin\theta_2)\neq 0$, atunci

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot[cos(\theta_1-\theta_2)+i\,sin(\theta_1-\theta_2)].$$

Pentru a extrage rădăcina dintr-un număr complex $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ se foloseşte formula

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right),\ \text{unde}\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Aşadar, rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex are n valori diferite.

Formula $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ se numeşte *formula Euler*. Evident, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$.

Cu ajutorul formulei Euler numărul complex $z\neq 0$ poate fi reprezentat sub o nouă formă: $z=\rho(cos\theta+i\,sin\theta)=\rho e^{i\theta}$, care se numeşte *formă exponențială* a lui z.

Probleme rezolvate

1. Să se efectueze operațiile:

a) $\dfrac{-3+2i}{5-i}$, b) $(1-i)^3$, c) $\sqrt[3]{1-i}$.

Rezolvare.

a) $\dfrac{-3+2i}{5-i}=\dfrac{(-3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\dfrac{-15-3i+10i+2i^2}{26}=-\dfrac{17}{26}+i\dfrac{7}{26}.$

b) *Metoda 1.* $(1-i)^3=1-3\cdot1\cdot i+3\cdot1\cdot i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i.$

Metoda 2. Scriem forma trigonometrică a numărului complex $z=1-i$:

$$\rho=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2},\ \theta=arctg\frac{-1}{1}=arctg(-1)=-arctg\,1=-\frac{\pi}{4}.$$

Deci $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ şi, după formula Moivre, obţinem:

$$(1-i)^3=\sqrt{2^3}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)=(-2)(1+i)=-2-2i.$$

c) În exemplul precedent am avut

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Deci $\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k}{3}-\right.$

$$\left.-i\sin\frac{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right],$$

unde $k=0,\ 1,\ 2.$

Prin urmare, avem

1) $k=0$: $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$;

2) $k=1$: $z_2=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$

$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}-i\sin\frac{9\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$

3) $k=2$: $z_3=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}-i\sin\frac{17\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(2\pi-\frac{7\pi}{12}\right)-i\sin\left(2\pi-\frac{7\pi}{12}\right)\right]=$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$

Uşor se verifică că $z_1^3=z_2^3=z_3^3=1-i$.

2. Să se determine locul geometric de puncte, care satisfac relaţia

a) $\operatorname{Re} z\le 5$, b) $\frac{\pi}{2}\le\arg z<\pi$, c) $1\le|z-1|<2$.

Rezolvare.

a) Fie $z=x+iy$. Atunci $\operatorname{Re} z=x$. Prin urmare, am obţinut relaţia $x\le 5$, care reprezintă mulţimea punctelor $M(x, y)$ din planul XOY, abscisa cărora $x\le 5$.

b) Întrucât $\frac{\pi}{2}\le\arg z<\pi$ şi $|z|\ge 0$ rezultă că domeniul respectiv reprezintă mulţimea punctelor planului XOY ce aparţin cadranului 2. Menţionăm că punctele de pe semiaxa OX (în direcţia negativă) nu aparţin acestui domeniu.

c) Fie $z=x+iy$. Atunci

$1\le|x+iy-1|<2$, $1\le|(x-1)+iy|<2$,

$1\le\sqrt{(x-1)^2+y^2}<2$, $1\le(x-1)^2+y^2<4$.

Prin urmare, domeniul respectiv reprezintă o coroană circulară mărginită de circumferinţele concentrice $(x-1)^2+y^2=1$, $(x-1)^2+y^2=4$.

Menționăm că punctele de pe circumferința mică aparțin domeniului, iar punctele de pe circumferința mare nu aparțin acestui domeniu.

Probleme propuse spre rezolvare

3.1. Să se efectueze operațiile:

a) $(2+i)(3-i)$, b) $(2i-1)^2+(1+3i)^2$,

c) $(1+3i)^2+(2-i)^2$, d) $\frac{2+i}{3-i}$, e) $\frac{5+2i}{1+2i}$,

f) $\frac{3-i}{4+5i}$, g) $(4-7i)^3$, h) $\frac{(4-i)(1+2i)}{(-2-i)(1-3i)}$,

i) $\frac{(m+ni)(n+mi)}{n-mi}$, j) $\frac{a\sqrt{b}+ib\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-ia\sqrt{b}}$,

k) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$, l) $\frac{a+bi}{b-ai}-i\frac{b-ai}{a+bi}$.

3.2. Să se afle numerele reale x și y, dacă:

a) $(1+2i)x+(2-3i)y=5-4i$,

b) $(2+3i)x-(4-5i)y=3-i$,

c) $(5+2i)x+(4+3i)y=-1-6i$,

d) $(-1+3i)x+(3-7i)y=1-i$,

e) $(-5+2i)x-(3-4i)y=2-i$,

f) $(x+3yi)+\frac{3}{2}y+2xi=4+8i$, g) $\frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{1+i}=1-3i$.

3.3. Să se determine forma trigonometrică și forma exponențială a numărului complex:

a) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$, c) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$,

d) $\frac{1-i}{1+i}$, e) $1-i$, f) $(1-i)(\sqrt{3}+i)$.

3.4. Să se interpreteze geometric următoarele identități:

a) $(1+3i)+(1-3i)=2$, b) $(3-5i)+(-1+3i)=2-2i$.

1.5. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|z|-z=1+2i$, b) $|z|+z=2+i$.

1.6. Să se demonstreze egalitățile:

a) $\frac{6-i}{3+4i}=\frac{13+41i}{-25+25i}$, b) $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$.

1.7. Să se rezolve sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7,\end{cases}$

b) $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

1.8. Folosind formula Moivre, să se calculeze:

a) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$, b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$, c) $\left[\sqrt{2}(\cos 10°+i\sin 10°)\right]^6$,

d) $\left[3(\cos 36°+i\sin 36°)\right]^5$, e) $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$, f) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{10}$.

1.9. Să se demonstreze identitățile:

a) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right)$,

b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^n\left(\cos\frac{\pi n}{6}-i\sin\frac{\pi n}{6}\right)$.

1.10. Să se afle:

a) $\sqrt{-5+12i}$, b) $\sqrt{i}$, c) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$,

d) $\sqrt{2\sqrt{3}+2i}$, e) $\sqrt[3]{1-i}$, f) $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$,

g) $\sqrt[4]{16i}$, h) $\sqrt[6]{-64}$, i) $\sqrt[3]{125}$, j) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

Să se verifice rezultatele obținute.

1.11. Să se determine locul geometric al punctelor ce satisfac relația

a) $|z|>5$, b) $|z-4i|\le 2$, c) $|z+2i|\ge 4$,

d) $|z+1+i|<2$, e) $1<|z|<3$, f) $|z-i|=|z-1|$,

g) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, h) $\operatorname{Im} z \le -3$, i) $\operatorname{Re} z = 0$, j) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \ge 1$.

Să se interpreteze geometric domeniile respective.

3.12. Să se descompună în factori expresiile:

a) $m^2 + 16n^2$, b) $m+n, m>0, n>0$, c) $1+tg^2\alpha$, d) $7+\sqrt{5}$.

3.13. Să se demonstreze că $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2$.

3.14. Să se demonstreze următoarele formule:

a) $\sin iz = i\,sh\,z$, b) $\cos iz = ch\,z$,

c) $sh\,iz = i\sin z$, d) $ch\,iz = \cos z$.

3.15. Să se calculeze:

a) $\sin i$, b) $\cos(1+i)$, c) $sh\,3i$,

d) $ch\,5i$, e) $ch\,(2-i)$, f) $\sin(1-i)$.

3.16. Folosind formula Euler, să se calculeze:

a) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + ... + \sin n\varphi$, $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in Z$, $n \in N$;

b) $\cos\varphi + \cos 2\varphi + ... + \cos n\varphi$, $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in Z$, $n \in N$;

c) $\sin\varphi + \sin 3\varphi + ... + \sin(2n-1)\varphi$, $\varphi \neq \pi k$, $k \in Z$, $n \in N$;

d) $\cos\varphi + \cos 3\varphi + ... + \cos(2n-1)\varphi$, $\varphi \neq \pi k$, $k \in Z$, $n \in N$.

§ 2. Polinoame. Funcţii raţionale

Expresia de forma

$$f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad n \in N,$$

se numeşte *polinom de gradul n.*

Coeficienţii $a_0, a_1, ..., a_n$, cât şi variabila x, pot lua atât valori reale, cât şi complexe. Se numeşte *rădăcină* a polinomului dat o astfel de valoare a variabilei x, pentru care polinomul se anulează.

Două polinoame se numesc *egale*, dacă coeficienţii respectivi (de pe lângă aceeaşi putere a variabilei x) sunt egali.

Menţionăm următoarele rezultate:

T1. (*Teorema Bezout*). De la împărţirea polinomului $P_n(x)$ la binomul $(x-a)$ se obţine un rest egal cu $P_n(a)$.

Din teorema Bezout rezultă că dacă $x=a$ este o rădăcină a polinomului $P_n(x)$, atunci $P_n(x)=(x-a)f_1(x)$, unde $f_1(x)$ este un polinom de gradul $(n-1)$.

T2. (*Teorema Gauss*). Orice polinom de gradul $n\geq 1$ cu coeficienți complecși are cel puțin o rădăcină reală sau complexă.

Pornind de la teoremele acestea este ușor de obținut următoarea descompunere a polinomului $P_n(x)$ în factori liniari:

$f(x)=P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, unde a_0 este coeficientul dominant al polinomului, iar $x_1,x_2,...,x_n$ sunt rădăcinile lui. Dacă unii factori din descompunerea aceasta coincid, atunci descompunerea polinomului are forma:

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_s)^{k_s},$$

unde $k_1+k_2+...+k_s=n$. În acest caz afirmăm că rădăcină x_1 este multiplă cu multiplicitatea k_1, rădăcină x_2 este multiplă cu multiplicitatea k_2 etc.

T3. Dacă polinomul $P_n(x)$ cu coeficienți reali are o rădăcină complexă $x_1=a+bi$, atunci și numărul complex conjugat $\overline{x_1}=a-bi$ este o rădăcină a lui.

Așadar, dacă $P_n(x)$ este un polinom de gradul n cu coeficienți reali, atunci în descompunerea

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

rădăcinile complexe figurează două câte două: $x_1=a+bi$ și $\overline{x_1}=a-bi$. Înmulțind factorii liniari respectivi, obținem un trinom pătrat cu coeficienții reali și discriminantul negativ:

$(x-x_1)(x-x_2)=(x-a-bi)(x-a+bi)=\left[(x-a)-bi\right]\times$

$\times\left[(x-a)+bi\right]=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+(a^2+b^2)$ cu

$\Delta=a^2-(a^2+b^2)=-b^2<0.$

Dacă numărul $x_1=a+bi$ este o rădăcină de multiplicitatea k, atunci numărul $x_2=a-bi$ este de asemenea o rădăcină de multiplicitatea k.

Deci polinomul cu coeficienți reali se descompune în factori cu coeficienți reali de gradul 1 (liniari) și 2 (pătratici) de multiplicitatea respectivă.

În cele ce urmează vom considera numai polinoame cu coeficienți reali. Raportul a două polinoame $P_n(x)$ și $Q_m(x)$ se numește *funcție rațională*: $f(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$.

Dacă $m<n$, atunci $f(x)$ se numește *funcție regulată*. În caz contrar, $f(x)$ se numește *neregulată*.

Împărțind numărătorul la numitor, orice funcție neregulată poare fi reprezentată sub formă de sumă a doi termeni: un polinom și o funcție regulată.

Funcțiile raționale regulate de forma:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k=2,3,...$;

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$;

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$, $k=2,3...$

se numesc *funcții simple*.

Fie $f(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ o funcție rațională regulată $(m<n)$.

Menționăm următoarele reguli de descompunere a funcției regulate $f(x)$ în funcții simple.

a) Dacă $P_n(x)$ are numai rădăcini reale simple, atunci $f(x)$ se descompune în funcții simple numai de tipul 1).

b) Dacă $P_n(x)$ are numai rădăcini complexe simple, atunci în descompunerea funcției $f(x)$ figurează numai funcții simple de tipul 3).

c) Dacă $P_n(x)$ are rădăcini simple reale și complexe, atunci $f(x)$ se descompune numai în funcții simple de tipul 1) și 3).

d) Dacă printre rădăcinile lui $P_n(x)$, rădăcina $x=a$ este multiplă cu multiplicitatea k, atunci în descompunerea funcției $f(x)$ figurează suma: $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}$.

Deci în cazul acesta $P_n(x)=(x-a)^k f_1(x)$ și $f(x)$ conține funcții simple de tipul 1) și 2).

e) Dacă printre rădăcinile lui $P_n(x)$ avem rădăcini complexe cu multiplicitatea k, adică $P_n(x)=(x^2+px+q)^k\cdot f_1(x)$, atunci în descompunerea lui $f(x)$ figurează suma

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Prin urmare, funcția $f(x)$ în descompunerea sa conține funcții simple de tipul 3) și 4).

Coeficienții $A_1,A_2,...A_k$ din d) și $M_1,N_1,M_2,N_2...,M_k,N_k$ din e) se calculează cu ajutorul așa-numitei metode a coeficienților nedeterminați.

Probleme rezolvate

1. Să se descompună în factori liniari sau pătratici cu coeficienți reali următoarele polinoame:

a) x^4+16, b) x^3-7x+6.

Rezolvare.

a) $x^4+16=(x^2)^2+4^2=(x^2)^2+2x^2\cdot4+4^2-2x^2\cdot4=(x^2+4)^2-8x^2=(x^2+4)^2-(\sqrt{8}x)^2=(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}+4)$.

Observăm că trinoamele pătrate au discriminanți negativi.

b) Observăm că $x=1$ este o rădăcină a polinomului x^3-7x+6.

Deci polinomul (x^3-7x+6) se împarte fără rest la binomul $(x-1)$. Folosind algoritmul Euclide pentru împărțirea polinoamelor, avem:

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad -7x+6 & x-1 \\ \hline -\,x^3-x^2 & x^2+x-6 \\ \hline \quad x^2-7x+6 & \\ \quad -\,x^2-x & \\ \hline \quad\quad -6x+6 & \\ \quad\quad -\,-6x+6 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Prin urmare, $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$.

Trinomul pătrat (x^2+x-6) are următoarele rădăcini:

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}$, adică $x_1=2, x_2=-3$.

Deci $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$.

2. Să se descompună funcţia regulată $f(x)=\dfrac{x^2-7}{x^3-x^2+x-1}$ în funcţii simple.

Rezolvare. Descompunem mai întâi numitorul în factori reali liniari şi pătratici:

$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$.

Aplicând cazul c), obţinem

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(x-1)(Mx+N)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Din egalitatea acestor două fracţii obţinem identitatea

$$x^2-7=A(x^2+1)+(x-1)(Mx+N).$$

Pentru a calcula coeficienţii A, M şi N luăm trei valori pentru x (este cel mai raţional de considerat în calitate de valori pentru x rădăcinile reale ale numitorului funcţiei date):

1) $x=1$: $1-7=A(1+1)+0$, de unde $A=-3$;

2) $x=0$: $-7=A-N$, de unde $N=A+7=-3+7=4$;

3) $x=-1$: $1-7=A\cdot 2-2(N-M)$, sau $-6=-6-8+2M$, de unde $2M=8$, adică $M=4$.

Deci $f(x)=-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4(x+1)}{x^2+1}$.

Notă. Coeficienţii A, M şi N pot fi calculaţi din egalitatea polinoamelor:

$x^2 - 7 = Ax^2 + A + Mx^2 + Nx - Mx - N$ sau

$x^2 - 7 = (A + M)x^2 + (N - M)x + (A - N)$.

Deci formăm sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} A + M = 1 \\ N - M = 0 \\ A - N = -7 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, obţinem acelaşi rezultat: $A=-3$, $M=N=4$.

Probleme propuse spre rezolvare

3.17. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $13x^2 + 2x + 2 = 0$, b) $8x^2 - 1 = 0$,

c) $(x-2)^4 - 81 = 0$, d) $(x-2)^4 + 81 = 0$,

e) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, f) $2x^4 + 19x^2 + 9 = 0$,

g) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$, h) $27x^3 - 26x^2 - 1 = 0$.

3.18. Să se descompună în factori liniari şi pătratici (cu coeficienţi reali) polinoamele:

a) $16x^4 - 81$, b) $16x^4 + 81$,

c) $x^6 + 9x^3 + 8$, d) $3x^4 - 11x^2 - 4$,

e) $8x^6 + 7x^3 - 1$, f) $x^3 - x^2 + 2x - 2$,

g) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, h) $27x^6 - 26x^3 - 1$.

3.19. Să se descompună funcţia raţională în funcţii simple:

a) $\dfrac{x-2}{2x^2+7x+3}$, b) $\dfrac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$, c) $\dfrac{x^2}{x^3-1}$,

d) $\dfrac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)}$, e) $\dfrac{3x^2-1}{(x-1)^2(x^2+1)}$, f) $\dfrac{1}{x(x-1)(x^2+1)}$,

g) $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2)^2}$, h) $\dfrac{2x+1}{x(x^2-1)}$,

i) $\dfrac{x^2+3}{(x+1)^2(x+3)}$, j) $\dfrac{2x^2+x-19}{(x+3)(x^2-1)}$.

Capitolul 4

CALCULUL INTEGRAL AL FUNCȚIEI DE O VARIABILĂ REALĂ

§ 1. Integrala nedefinită

Funcția $F(x)$ se numește *primitivă* a funcției $f(x)$ pe [a, b], dacă $F'(x)=f(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Dacă $F(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$, atunci expresia $F(x)+C$, unde C este o constantă reală, se numește *integrală nedefinită* a funcției $f(x)$. Se notează astfel: $\int f(x)dx$. Așadar, prin definiție, $\int f(x)dx = F(x)+C$, dacă $F'(x) = f(x)$. Menționăm că dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, atunci există $\int f(x)dx$.

Remarcăm următoarele proprietăți ale integralei nedefinite:

1. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in R$;
5. $\left[\int f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;
6. $\int f(x+a)dx = F(x+a)+C$, dacă $F'(x) = f(x)$;
7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, dacă $F'(x) = f(x)$.

În proprietățile 1-7 se presupune că integralele respective există. Există două metode tradiționale de integrare:

Metoda 1. *Schimbarea de variabilă.* Fie $\varphi: I \to J$, $f: J \to R$. Dacă φ este derivabilă și strict monotonă pe I, φ' este continuă pe

I, f continuă pe J şi $\varphi(t)\in J, \forall t\in I$, atunci are loc formula $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, unde I, J intervale din R.

Metoda 2. *Integrarea prin părţi.* Dacă $u = u(x)$, $v = v(x)$ sunt continue împreună cu derivatele lor $u'(x)$ şi $v'(x)$ pe intervalul I din R, atunci are loc formula $\int u\,dv = uv - \int v du$.

Din definiţia integralei nedefinite şi a tabelului de derivate (capitolul 2, §1), rezultă următorul tabel al integralelor nedefinite:

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1, r \in R$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$;
6. $\int e^x dx = e^x + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq \pi k, k \in Z$;
11. $\int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C, x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z$;
12. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C, x \neq \pi k, k \in Z$;
13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$;
14. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C, x \neq \pi k, k \in Z$;
15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C, a \neq 0$;
16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0, x \neq \pm a$;
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, |x| < |a|$;

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C, a \neq 0;$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C, |x|>|a|;$

20. $\int sh\,x\,dx = ch\,x+C;$ 21. $\int ch\,x\,dx = sh\,x+C,$

22. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x+C, x \neq 0;$ 23. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x+C.$

Cercetăm calcularea unor integrale generale.

A. Fie $\int f(x)dx$, unde *f(x)* este funcție rațională. Dacă *f(x)* este funcție rațională neregulată, atunci ea se reduce la o funcție rațională regulată (împărțind numărătorul la numitor). Apoi funcția rațională regulată se descompune în funcții simple (vezi capitolul 3, §2). Prin urmare, integrarea funcțiilor raționale se reduce la integrarea unui polinom şi a celor patru tipuri de funcții simple:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = \left|\begin{matrix} x-a=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t|+C = A\ln|x-a|+C.$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \left|\begin{matrix} x-a=s \\ dx=ds \\ k=2,3,... \end{matrix}\right| = A\int s^{-k}ds = \frac{A}{(1-k)}\frac{1}{s^{k-1}}+C =$

$$= \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left|\begin{matrix} x^2+px+q=s \\ (2x+p)dx=ds \\ p^2-4q<0 \end{matrix}\right| =$

$$= \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x + \dfrac{p}{2} = t \\ dx = dt \\ q - \dfrac{p^2}{4} = a^2 > 0 \end{array} \right| = \frac{M}{2} \ln\left(x^2 + px + q\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln\left(x^2 + px + q\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} arctg \frac{\left(x + \dfrac{p}{2}\right)}{a} + C.$$

4. $\int \dfrac{Mx + n}{\left(x^2 + px + q\right)^k} dx$, $k = 2,3,\ldots$, $p^2 - 4q < 0$.

În baza notațiilor din punctul precedent avem

$$\int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k} dx = \frac{M}{2(1-k)} \frac{1}{\left(x^2 + px + q\right)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}.$$

Integrala $I_k = \int \dfrac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}$ se calculează cu ajutorul unei formule recurente. Într-adevăr, înmulțind și împărțind mai întâi la a^2, apoi adunând și scăzând t^2 la numărător, obținem

$$I_k = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{\left(t^2 + a^2\right)^k} dt = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{\left(a^2 + t^2\right) dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} - \int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left[I_{k-1} - \int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} \right].$$

Integrala din paranteze se va calcula prin părți:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} = \left| \begin{array}{c} t = u,\ dt = du \\ dv = \dfrac{tdt}{\left(t^2 + a^2\right)^k},\ v = \dfrac{-1}{2(k-1)\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} \cdot t + \int \frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} dt =$$

$$= \frac{-1}{2(k-1)} \cdot \frac{t}{\left(t^2+k^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} I_{k-1}.$$

Deci $I_k = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(k-1)} \frac{t}{\left(t^2+k^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1}\right]$.

Continuând acest procedeu, ajungem la integrala cunoscută:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C.$$

Înlocuind peste tot t şi a prin valorile lor, vom exprima integrala dată prin x şi numerele M, N, p şi q.

B. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$, unde simbolul R înseamnă o funcţie raţională în raport cu $x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$, adică asupra mărimilor $x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$, se efectuează numai operaţii raţionale.*) Notăm prin k numitorul comun al fracţiilor $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$. Substituţia $x=t^k$ reduce această integrală la o integrală de la fracţii raţionale (cazul A).

C. În mod analog se procedează la calcularea integralei

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx.$$

Aici se face substituţia $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, unde k este numitorul comun al fracţiilor ordinare $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$, de unde obţinem x şi dx. Astfel cazul C) se reduce la cazul A).

D. Fie $\int R(\sin x, \cos x) dx$. Cu ajutorul substituţiei universale

---

*) Exact în acelaşi sens trebuie înţelese mai departe notaţiile de forma $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots\right)$, $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, $R(\sin x, \cos x)$ etc.

$tg\frac{x}{2}=t$, avem $x=2arctg\,t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ şi

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R^*(t)dt,$$

unde $R^*(t)$ este o funcţie raţională (cazul A).

În diferite cazuri particulare această substituţie nu este raţională.

Exemple.

1 $\int R(\sin x)\cos x\,dx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ dt=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=\int R(t)\,dt$ (cazul A).

2 $\int R(\cos x)\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ dt=-\sin x\,dx\end{matrix}\right|=-\int R(t)dt$ (cazul A).

3 $\int R(tg\,x)dx=\left|\begin{matrix}tg\,x=t\\ x=arctg\,t\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}=\int R^*(t)\,dt$ (cazul A).

4 $\int R(\sin^{2m}x,\cos^{2n}x)dx=\left|\begin{matrix}tg\,x=t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}\\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$

$$\int R\left(\frac{t^{2m}}{(1+t^2)^m},\frac{1}{(1+t^2)^n}\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int R^*(t)dt$$ (cazul A).

5 $\int \sin^m x\cos^n x\,dx,\ (m,n\in Z)$.

a) Cel puţin unul din numerele m şi n este impar. Fie de exemplu $m=2k+1$. Deci avem

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \begin{cases} m>0: & \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x\, dx \\ m<0: & \int \dfrac{\cos^n x}{\sin^{-2k} x \sin x} dx \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} m>0: & \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x\, dx \\ m<0: & \int \dfrac{\cos^n x}{\left(1-\cos^2 x\right)^{-k}\left(1-\cos^2 x\right)} \sin x\, dx \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} m>0: & \int R(\cos x)\sin x\, dx, \\ m<0: & \int R^*(\cos x)\sin x\, dx. \end{cases}$$

Prin urmare, acest caz s-a redus la cazul (D, 2).

b) Numerele m şi n sunt pare nenegative. Formulele $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ şi $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ reduc dublu puterile lui $\cos x$ şi $\sin x$. Termenii cu puteri impare ale $\cos 2x$ sau $\sin 2x$ se integrează conform cazului precedent. Pentru termenii cu puteri pare ale $\sin 2x$ şi $\cos 2x$ se aplică din nou aceste formule etc.

c) Dacă cel puţin unul din numerele pare m şi n este negativ, atunci substituţia

$$tg\, x = t,\ x = arctg\, t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

reduce integrala aceasta la cazul A. Această substituţie este valabilă şi în cazul când $m \in R, n \in R$ şi $m+n = -2k$ cu $k \in N$.

6. Integralele de forma:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx,$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx,$$

$$\int \sin mx \cos nx\, dx,$$

se calculează uşor folosind formulele:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right].$$

II. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R(x, \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}\,dx =$

$$= \left| \begin{matrix} x+\frac{b}{2a} = t,\ dx = dt \\ c-\frac{b^2}{4a} = \pm k^2 \end{matrix} \right| = \int R\left(t, \sqrt{at^2 \pm k^2}\right) dt.$$

a) Dacă a>0, atunci $\int R\left(t, \sqrt{\left(\sqrt{a}t\right)^2 + k^2}\right) dt$ cu ajutorul substituției $\sqrt{a}t = ktg\ z$ se reduce la cazul *D*.

b) Dacă *a>0*, atunci $\int R\left(t, \sqrt{\left(\sqrt{a}t\right)^2 - k^2}\right) dt$ cu ajutorul substituției $\sqrt{a}t = k\sec z$ se reduce la cazul *D*.

c) Dacă *a<0*, atunci $\int R\left(t, \sqrt{k^2 - \left(\sqrt{|a|}t\right)^2}\right) dt$ cu ajutorul substituției $\sqrt{|a|}t = k\sin z$ se reduce la cazul *D*.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$, b) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$,

c $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$, d) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Rezolvare.

a) $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx +$

$$+\int \frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctg\, x + C.$$

b) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx =$

$= \frac{1}{2}tgx + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2}(x + tgx) + C.$

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= -ctg\, x + tg\, x + C.$

d) $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$ (proprietatea 7 şi formula 15).

Notă. La calcularea integralelor acestea am folosit numai proprietăţile 1-7 şi tabelul de integrale.

2. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} - 3}}$, b) $\int \frac{x\, dx}{x^4 + 2x^2 + 5}$, c) $\int \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sin 2\sqrt{x}}dx$,

d) $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx$, e) $\int cos\,(ln\, x)\, dx$, $x>0$.

Rezolvare.

a) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} - 3}} = \left| \begin{matrix} x^5 = t \\ dt = 5x^4 dx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{\sqrt{t^2 - 3}} = \frac{1}{5}\ln\left|t + \sqrt{t^2 - 3}\right| + C =$

$= \frac{1}{5}\ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10} - 3}\right| + C.$

b) $\int \frac{xdx}{x^4 + 2x^2 + 5} = \int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2 + 4} = \left| \begin{matrix} x^2 + 1 = t \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 4} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{4} arctg \frac{x^2 + 1}{2} + C.$

c) $\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}dx = \left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right| = \int \frac{\sin t+\cos t}{t\sin 2t}2tdt =$

$2\int \frac{\sin t+\cos t}{2\sin t\cos t}dt = \int\frac{dt}{\cos t}+\int\frac{dt}{\sin t} = \ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+C =$

$\ln\left|tg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|tg\frac{\sqrt{x}}{2}\right|+C.$

d) $\int\left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx = \left|\begin{array}{l}x^2-2x+5=u\\ du=(2x-2)dx\\ e^{-x}dx=dv\\ v=-e^{-x}\end{array}\right| = -e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)+$

$+\int 2(x-1)\,dx\,e^{-x} = -e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)+2\int(x-1)e^{-x}dx =$

$\left|\begin{array}{l}x-1=u\\ du=dx\\ e^{-x}dx=dv,\ v=-e^{-x}\end{array}\right| = -e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)+2(1-x)e^{-x}+$

$+2\int e^{-x}dx = e^{-x}\left(-x^2+2x-5+2-2x\right)-2e^{-x}+C =$

$e^{-x}\left(-x^2-3-2\right)+C = -\left(x^2+5\right)e^{-x}+C.$

e) $\int\cos(\ln x)\,dx = \left|\begin{array}{l}\cos(\ln x)=u\\ du=-\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx\\ dx=dv,\ v=x\end{array}\right| = x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx =$

$\left|\begin{array}{l}\sin(\ln x)=u\\ du=\frac{1}{x}\cos(\ln x)dx\\ dx=dv,\ v=x\end{array}\right| = x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx.$

Prin urmare, integrând prin părți de două ori, am obținut $\int cos(ln\,x)dx = x\,cos(ln\,x) + x\,sin(ln\,x) - \int cos(ln\,x)dx$, de unde $2\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$, adică

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + C.$$

3. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}dx$, b) $\int \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{3}dx$,

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x}$,

d) $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$, e) $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}}\,dx$.

Rezolvare.

a) Avem cazul A:

$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$. Folosind algoritmul Euclide, împărțind numărătorul la numitor, obținem:

$f(x) = x + 1 - \frac{x + 2}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Descompunem funcția rațională regulată

$f_1(x) = \frac{x+2}{x(x^2 - x - 2)} = \frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}$ în funcții simple.

Obținem

$$f_1(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + C(x+1)x}{x(x+1)(x-2)}.$$

Egalând aceste fracții, obținem identitatea:

$x + 2 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$.

Considerăm

$x=0$: $2=-2A$, adică $A=-1$,

$x=2$: $4=6C$, adică $C = \frac{2}{3}$,

$x=-1:\ 1=3B,$ adică $B=\frac{1}{3}$.

Prin urmare, $\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{3(x-2)}$ şi

$$\int\frac{x^4+3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int\left[x+1+\frac{1}{x}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{3(x-2)}\right]dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x-2|+C=\frac{x^2}{2}+x+$$

$$+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{(x+1)(x-2)^2}\right|+C.$$

b) $\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{3}dx=$

$$\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx-\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{3x}{2}dx=\frac{1}{4}\int\left[\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right)\right]dx-\frac{1}{4}\int\left[\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{3x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{3x}{2}\right)\right]dx=$$

$$\frac{1}{4}\int\sin\frac{5x}{6}dx+\frac{1}{4}\int\sin\left(-\frac{x}{6}\right)dx-\frac{1}{4}\int\sin\frac{11x}{6}dx-\frac{1}{4}\int\sin\left(-\frac{7x}{6}\right)dx=$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{6}{5}\cos\frac{5x}{6}+6\cos\frac{x}{6}+\frac{6}{11}\cos\frac{11x}{6}-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{6}\right)+C=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{x}{6}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{6}+\frac{1}{11}\cos\frac{11x}{6}-\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{6}\right)+C.$$

c) $\int\frac{dx}{\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x}=\int\frac{dx}{\cos^2x\left(tg^2x+2tg\,x+1\right)}=$

$$\int\frac{\left(1+tg^2x\right)dx}{(tg\,x+1)^2}=\left|\begin{array}{l}cazul\ D,3\\ tg\,x=t\\ dx=\dfrac{dt}{1+x^2}\end{array}\right|=\int\frac{\left(1+t^2\right)dt}{(t+1)^2\left(1+t^2\right)}=\int\frac{dt}{(t+1)^2}=$$

$$= -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{tg\,x+1} + C \text{ (proprietatea 6 şi formula 3).}$$

d) $$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} cazul\ D,4 \\ tg\,x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{1}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

e) $$\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}} dx = \left| \begin{array}{l} cazul\ D,5.c \\ m+n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{2} = -4 \\ tg\,x = t,\ x = arctgt \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{\frac{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^9}}}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \sqrt{t\left(1+t^2\right)^4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \left(1+t^2\right)\sqrt{t}\, dt = \int \left(\sqrt{t} + t^{\frac{5}{2}}\right) dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + \frac{2}{7}\sqrt{t^7} + C = \frac{2}{3}\sqrt{tg^3 x} +$$

$$+ \frac{2}{7}\sqrt{tg^7 x} + C = 2\sqrt{tg\,x}\left(\frac{1}{3} tgx + \frac{1}{7} tg^3 x\right) + C =$$

$$= \frac{2}{21} tgx \cdot \sqrt{tgx}\left(7 + 3tg^2 x\right) + C.$$

Probleme propuse spre rezolvare

4.1. Cu ajutorul proprietăţilor integralelor nedefinite (proprietăţile 1-7) şi a tabelului de integrale, să se calculeze:

a) $\int 6\sqrt[5]{x}dx$, b) $\int\left(\frac{7}{x}-\frac{4}{x^5}\right)dx$, c) $\int\left(x^5+5x^4-1\right)dx$,

d) $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$, e) $\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x\sqrt{x}}dx$, f) $\int\frac{x^3+1}{x+1}dx$,

g) $\int\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2-9}}dx$, h) $\int\frac{x^2-6}{x^2-4}dx$, i) $\int\frac{dy}{\sqrt{2-3y^2}}$,

j) $\int\left(\frac{3}{2x^2+9}-\frac{8}{2x^2-9}\right)dx$, k) $\int\frac{5^{2x}-7^x}{5^x}dx$, l) $\int\frac{e^{2t}-1}{e^t+1}dt$,

m) $\int\left(t^2+\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)dt$, n) $\int 2^x 3^{2x}dx$, o) $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

p) $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}dx$, r) $\int(5x+7)^{19}dx$, s) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$,

t) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$, u) $\int 6^x\left(1-\frac{6^{-x}}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$.

4.2. Cu ajutorul formulelor 1-23 şi a proprietăţilor 1-7 ale integralei nedefinite, să se calculeze integralele:

a) $\int tg^2 x\,dx$, b) $\int\cos(\pi x+1)dx$,

c) $\int\sin^2 6x\,dx$, d) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$,

e) $\int\frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$, f) $\int(2tg\,x-3ctg\,x)^2dx$,

g) $\int(sh\,x-\sin x)dx$, h) $\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$,

i) $\int ctg(2x+1)dx$, j) $\int\frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$,

k) $\int\frac{2\cos^2 x+3\cos x-4}{\cos^2 x}dx$, l) $\int(\sin x-\cos x)^2dx$,

m) $\int \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos 2x} dx$,

n) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos 2x} dx$,

o) $\int \frac{7+3tg^2 x}{\sin^2 x} dx$,

p) $\int \frac{\left(a^x - b^x\right)^2}{a^x b^x} dx$.

4.3. Folosind metoda substituției, să se calculeze integralele:

a) $\int x\sqrt{x-5}dx$,

b) $\int x\cos\left(x^2\right)dx$,

c) $\int \frac{dx}{x\ln x}$,

d) $\int \sqrt[3]{\left(ax^2+b\right)}x\,dx$,

e) $\int \cos(\sin x)\cos x\,dx$,

f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-16}}$,

g) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\cos^4 x}} dx$,

h) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5} dx$,

i) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$,

j) $\int xch\left(5x^2+3\right)dx$,

k) $\int \frac{x^3 dx}{9-4x^8}$,

l) $\int \left(3 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$,

m) $\int \frac{e^{\arcsin x} + x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

n) $\int \sqrt{3-chx}\,shx\,dx$,

o) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$,

p) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$,

r) $\int th ax\,dx$,

s) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tg x - 1}}$,

t) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$,

u) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$,

v) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$,

w) $\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

4.4. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int x\cos x dx$,

b) $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$,

c) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$,

d) $\int x^3\sin\left(x^2\right)dx$,

e) $\int x arctg\frac{x}{a}dx$,

f) $\int\left(x^3-27\right)ln(2x)dx$,

g) $\int x\arcsin x\,dx$,

h) $\int\ln\left(x^2+1\right)dx$,

i) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$,

j) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

k) $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$,

l) $\int e^{5x}\cos 4x\,dx$,

m) $\int ln\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)dx$,

n) $\int\left(x^2+2x-1\right)\sin 3x dx$,

o) $\int\left(x^2-2x+3\right)\ln x\,dx$,

p) $\int x^2\arccos x dx$.

4.5. Să se calculeze integralele de la următoarele funcţii raţionale:

a) $\int\frac{x\,dx}{x^3+1}$,

b) $\int\frac{\left(x^3+1\right)dx}{x\left(x-1\right)^3}$,

c) $\int\frac{3x+2}{x\left(x+1\right)^3}dx$,

d) $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}dx$,

e) $\int\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$,

f) $\int\frac{x^5}{x^3-1}dx$,

g) $\int\frac{x^3+2}{x^3-4x}dx$,

h) $\int\frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{\left(x+1\right)^3}dx$,

i) $\int\frac{x^4+1}{x^4-1}dx$,

j) $\int\frac{dx}{x^3-8}$,

k) $\int\frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx$,

l) $\int\frac{x^2+2}{x^4+4}dx$,

m) $\int\frac{x^2dx}{x^2-4x+3}$,

n) $\int\frac{x^4}{x^4-16}dx$,

o) $\int \frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx$, p) $\int \frac{x^4+1}{x^3+1}dx$.

4.6. Să se calculeze integralele următoarelor funcții trigonometrice:

a) $\int \sin^3 x\,dx$, b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$,

c) $\int \cos^7 x\,dx$, d) $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$,

e) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$, f) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$,

g) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$, h) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$,

i) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$, j) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$,

k) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$, l) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}dx$,

m) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$, n) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$,

o) $\int \cos 4x \cos 7x\,dx$, p) $\int \sin x \sin 3x\,dx$,

r) $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$, s) $\int \frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}}dx$,

t) $\int \sin(\ln x)\,dx$. u) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

4.7. Să se calculeze integralele următoarelor funcții iraționale:

a) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$, b) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$,

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, d) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$,

e) $\int \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$,

f) $\int \frac{\sqrt{2+3x}}{x-3}dx$,

g) $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}dx$,

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$,

i) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$,

j) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

k) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$,

l) $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$,

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$,

n) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

4.8. Să se calculeze integralele:

a) $\int \sin^2 x \sin 3x\,dx$,

b) $\int \frac{x^2-2}{x^2+1} arctg\, x\,dx$,

c) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$,

d) $\int (2x^2-1)\cos 2x\,dx$,

e) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$,

f) $\int \sqrt{2^x-1}\,dx$,

g) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$,

h) $\int \sin 2x \ln\cos x\,dx$,

i) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$,

j) $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})dx}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt{x}}$,

k) $\int \frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$,

l) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$,

m) $\int ch^3 x\,dx$,

n) $\int e^{-x}\ln(1+e^x)dx$,

o) $\int \frac{x\,arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$,

p) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$,

r) $\int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}}dx$,

s) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}}dx$,

t) $\int \sqrt{tg^3 x}\sec^4 x\,dx$,

u) $\int \sqrt{tgx}\sec^6 x\,dx$.

§2. Integrala definită

Fie funcția $y = f(x)$ definită pe $[a, b]$, $a<b$. Divizăm acest segment în n părți arbitrare prin punctele

$$a = x_0 < x_1 <...<...x_n = b.$$

Vom nota această diviziune prin τ, iar punctele $x_0, x_1,....,x_n$ le vom numi *puncte de diviziune*. În fiecare din segmentele parțiale obținute $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$ alegem un punct arbitrar ζ_i. Vom nota prin Δx_i diferența $x_i - x_{i-1}$, care se numește lungimea segmentului parțial $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$.

Formăm suma $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$, care se numește *sumă integrală* pentru funcția $f(x)$ pe $[a, b]$. Evident că această sumă depinde atât de diviziunea τ, cât și de alegerea punctului $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n$. Notăm prin λ lungimea segmentului parțial maximal al diviziunii τ: $\lambda = \max_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$.

Dacă există limita finită a sumei integrale σ când $\lambda \to 0$, atunci această limită se numește *integrală definită* a funcției $f(x)$ pe segmentul $[a, b]$ și se notează

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i.$$

În acest caz funcția $f(x)$ se numește *integrabilă* (Riemann) pe segmentul $[a, b]$. Numerele a și b se numesc respectiv *limita de jos* și *limita de sus* a integralei, funcția $f(x)$ se numește *funcție de sub integrală*, iar x se numește *variabilă de integrare*. Menționăm că dacă funcția $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, atunci există integrala definită

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta i)\Delta x_i.$$

Sensul geometric al integralei definite: integrala definită a unei funcții nenegative continue pe $[a, b]$ este egală numeric

cu aria trapezului curbiliniu mărginit de curba $y=f(x)$, axa OX și de dreptele $x=a$, $x=b$ cu $a<b$.

Sensul fizic al integralei definite: integrala definită a unei funcții $F(x)\geq 0$ și continuă pe $[a, b]$ este egală numeric cu lucrul efectuat de forța $F(x)$ pentru deplasarea punctului material din poziția $x=a$ în poziția $x=b$ (se presupune că direcția forței coincide cu direcția axei OX).

Pentru a calcula integrala definită se folosește formula Newton-Leibniz: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, unde $F(x)$ este primitiva funcției $y=f(x)$ pe $[a, b]$, adică $F'(x)=f(x)$ pentru orice $x\in[a,b]$. Prin urmare, calcularea integralei definite se reduce la calcularea integralei nedefinite respective. Remarcăm următoarele proprietăți ale integralei definite:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. $\int_a^b \left[k_1 f_1(x)\pm k_2 f_2(x)\right]dx = k_1\int_a^b f_1(x)\,dx \pm k_2\int_a^b f_2(x)dx,\ k_1,k_2\in R$.
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c\in[a,b]$.
5. Dacă $f(x)\leq g(x)$, pentru orice $x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
6. Dacă m și M sunt respectiv valoarea cea mai mică și valoarea cea mai mare ale funcției $f(x)$ pe $[a,b]$, atunci

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

7. Dacă $f(x)$ este definită pe $[a, b]$, atunci există un punct $c \in]a,b[$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

8. Dacă $f(x)$ este impară pe $[-a, a]$, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

9. Dacă $f(x)$ este pară pe $[-a, a]$, atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

10. Dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, atunci funcția $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe $[a, b]$ și $F'(x) = f(x)$ pe acest segment.

În proprietățile 1-9 se consideră că funcțiile respective sunt integrabile pe $[a, b]$ cu $a<b$.

Valoarea numerică $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ din proprietatea 7 se numește *valoarea medie* a funcției $f(x)$ pe $[a, b]$.

Există două metode tradiționale pentru calcularea integralei definite.

Metoda 1. *Metoda substituției.* Dacă $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$, $x = \varphi(t)$ este continuă împreună cu derivata ei $\varphi'(t)$ pe $[\alpha, \beta]$ și mulțimea valorilor funcției $\varphi(t)$ aparține $[a, b]$, atunci este valabilă formula $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ cu $x = \varphi(t), a = \varphi(\alpha)$ și $b = \varphi(\beta)$.

Metoda 2. *Integrarea prin părți.* Dacă funcțiile continue $u=u(x)$, $v=v(x)$ admit derivate continue pe $[a, b]$, atunci este valabilă formula $\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze integralele:

a) $\int_{-1}^{1}|x|\,dx$, b) $\int_{-1/2}^{1/2}(\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

Rezolvare.

a) $\int_{-1}^{1}|x|dx=|P9|=2\int_{0}^{1}x\,dx=x^2\Big|_0^1=1$ sau

$$\int_{-1}^{1}|x|\,dx=|P4|=\int_{-1}^{0}|x|\,dx+\int_{0}^{1}|x|\,dx=-\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{1}xdx=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=-\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=1.$$

b) Observăm că funcţia $f(x)=(\cos x)\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$ este impară pe $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, deoarece

$$f(-x)=\left[\cos(-x)\right]\ln\frac{1-x}{1-(-x)}=(\cos x)\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}=$$

$$(\cos x)\left(-\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x).$$

Prin urmare, după proprietatea 9 $\int_{-1/2}^{1/2}(cos\,x)\cdot ln\frac{1+x}{1-x}dx=0.$

2. Să se demonstreze că:

a) $\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{dx}{arcsin\,x}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{cos\,x}{x}dx$, b) $\int_{-2}^{2}\frac{5x^7-2x^5+7x^3-x}{x^4+5x^2+4}dx=0.$

Rezolvare.

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right| = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos t}{t} dt = |P1| = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx .$$

b) Observăm că funcția $f(x) = \dfrac{5x^7 - 2x^5 + 7x^3 - x}{x^4 + 5x^2 + 4}$ este impară pe $[-2, 2]$, deoarece

$$f(-x) = \frac{-5x^7 + 2x^5 - 7x^3 + x}{x^4 + 5x^2 + 4} = -\frac{5x^7 - 2x^5 + 7x^3 - x}{x^4 + 5x^2 + 4} = -f(x).$$

Prin urmare, conform proprietății 9,

$$\int_{-2}^{2} \frac{5x^7 - 2x^5 + 7x^3 - x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 0.$$

3. Să se calculeze valoarea medie a funcției $f(x) = \dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ pe $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Rezolvare. Avem

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{12}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} .$$

Calculăm mai întâi integrala nedefinită respectivă:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \left| \begin{array}{l} \S 1, \text{cazul } D,5,c \\ m + n = -1 - 3 = -4 \\ tgx = t \\ x = arctg\, t \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}}} = \int \frac{1+t^2}{t} dt = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \ln|tg\, x| + \frac{1}{2} tg^2 x + C.$$

Prin urmare, după formula Newton-Leibniz, avem

$$f(c) = \frac{12}{\pi} \left(\ln|tg\, x| + \frac{1}{2} tg^2 x \right) \Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{12}{\pi} \left[\ln\sqrt{3} - \ln 1 + \frac{1}{2}(3-1) \right] =$$

$$= \frac{6}{\pi}(2 + \ln 3).$$

4. Să se calculeze derivata funcției $y=f(x)$, dacă

a) $f(x) = \int_{x^2}^{x^4} \ln t\, dt,\ x > 0;$ b) $\int_0^y e^t dt - \int_0^x \sin t\, dt = 0.$

Rezolvare.

a) Avem $f(x) = \int_{x^2}^{a} \ln t\, dt + \int_a^{x^4} \ln t\, dt = -\int_a^{x^2} \ln t\, dt + \int_a^{x^4} \ln t\, dt.$

Aplicând proprietatea 10 şi derivarea funcției compuse, obținem: $f'(x) = -\left(\int_a^{x^2} \ln t dt \right)'_{x^2} \cdot \left(x^2\right)' + \left(\int_a^{x^4} \ln t dt \right)'_{x^4} \cdot \left(x^4\right)' =$

$$= \left(-\ln x^2\right)\left(x^2\right)' + \left(\ln x^4\right)\left(x^4\right)' = -2x \ln x^2 + 4x^3 \ln x^4 =$$

$$= -4x \ln x + 16x^3 \ln x = 4x(\ln x)\left(4x^2 - 1\right).$$

b) În cazul dat funcția $y=f(x)$ este definită implicit. Deci conform proprietății 10 şi derivarii funcției compuse, obținem $e^y y'(x) - \sin x = 0$, de unde $y'(x) = \frac{\sin x}{e^y} = e^{-y} \sin x.$

4.9. Folosind formula Newton-Leibniz şi proprietăţile 1 – 9, să se calculeze integralele:

a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx$, b) $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)dx$, c) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x}$,

d) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$, e) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$, f) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} tg^4 x\, dx$,

g) $\int_0^2 sh^3 x\, dx$, h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, i) $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$,

j) $\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}dx$, k) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

l) $\int_0^2 f(x)dx$, dacă $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ \sqrt{x}, & x \in [1,2] \end{cases}$,

m) $\int_0^2 |1-x|dx$, n) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$, o) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$,

p) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\, dx$, r) $\int_{-7}^7 \frac{x^4 \sin x}{x^6+2}dx$, s) $\int_{-5}^5 \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx$,

t) $\int_0^{2,5} f(x)dx$, dacă $f(x) = \begin{cases} 3, x \in [0;1] \\ 5-2x, x \in [1;2,5]. \end{cases}$

4.10. Aplicând metoda substituţiei, să se calculeze integralele:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x}$, c) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$,

d) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{3+\sin 2x}dx$, e) $\int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$, f) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$,

g) $\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$, h) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$, i) $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2}dx$,

j) $\int_{2}^{\cdot} \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$, k) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$, l) $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

4.11. Să se demonstreze că:

a) $\int_{0}^{1} x^m(1-x)^n dx = \int_{0}^{1} x^n(1-x)^m dx, \left(m,n \in R^+\right)$,

b) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$,

c) $\int_{\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0, (m \neq n)$,

d) $\int_{0}^{a} f(x)g(a-x)dx = \int_{0}^{a} g(x)f(a-x)dx$,

e) $\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx$,

f) $\int_{0}^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^m x\, dx, (m \in N)$,

g) $\int_{0}^{\pi} x \cdot f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$, h) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int_{1}^{2} \frac{e^x}{x} dx$.

4.12. Să se calculeze integralele:

a) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$, b) $\int_{-1}^{1} arctgx\, dx$, c) $\int_{0}^{\pi/4} x^2 \cos 2x\, dx$,

d) $\int_{1}^{e} x \ln x\, dx$, e) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^2}$, f) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$,

g) $\int_{0}^{\pi} \cos 5x \cos x\, dx$, h) $\int_{0}^{1} e^{x+e^x} dx$, i) $\int_{-3}^{3} \frac{x^3 \cos x}{x^2+1} dx$,

j) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$, k) $\int_{1}^{e} \ln(ex)\, dx$, l) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \cos 2x\, dx$.

4.13. Să se calculeze valoarea medie a funcţiei $f(x)$ pe

$[a, b]$, dacă:

a) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ pe $[1, e]$,

b) $f(x)=x\sin x$ pe $[0, \pi]$,

c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ pe $\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

d) $f(x)=\ln(1-3x)$ pe $[-2, -1]$,

e) $f(x)=\dfrac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ pe $[1, 3]$,

f) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}$ pe $[0, 1]$,

g) $f(x)=\sin^2 x$ pe $[0, 2\pi]$,

h) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ pe $[0, 2]$.

4.14. Să se calculeze derivata funcției $y=f(x)$, dacă:

I. a) $f(x)=\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)dt,\ x>0,$ b) $f(x)=\int\limits_{x}^{x^2}\dfrac{dt}{\ln t},\ x>0,$

c) $f(x)=\int\limits_{1/x}^{0}\dfrac{dt}{\sqrt{2+t^2}},\ x\neq 0,$ d) $f(x)=\int\limits_{2}^{\sqrt[3]{x}}\dfrac{dt}{ln(t^3+1)},\ x>-1;$

II. $y=f(x)$ este definită implicit:

e) $\int\limits_{0}^{y}e^{-t^2}+\int\limits_{0}^{x^2}sin^2 t\,dt=0,$ f) $\int\limits_{\pi/2}^{x}\sqrt{3-2\sin^2 t}\,dt+\int\limits_{y}^{0}\cos t\,dt=0,$

III. $y=f(x)$ este definită parametric:

g) $\begin{cases} x=\int\limits_{2}^{t^3}\sqrt[3]{z}\,\ln z\,dz \\ y=\int\limits_{\sqrt{t}}^{3}z^2\,\ln z\,dz,\ t>0, \end{cases}$ h) $\begin{cases} x=a\sqrt{\pi}\int\limits_{t^3}^{0}cos\dfrac{\pi z}{3}dz \\ y=a\sqrt{\pi}\int\limits_{t^3}^{0}sin\dfrac{\pi z}{3}dz, \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = \int\limits_{2}^{t} \dfrac{\ln z}{z} dz \\ y = \int\limits_{3}^{\ln t} e^z dz, t > 0, \end{cases}$ j) $\begin{cases} x = \int\limits^{\arcsin t} \cos z\, dz \\ y = \int\limits_{2}^{t} \dfrac{\sqrt{t}\sin(z^2)}{z} dz, t > 0. \end{cases}$

4.15. Să se demonstreze că:

a) dacă funcția $f(x)$ este pară pe $[-a, a]$, atunci una din primitivele ei este funcție impară pe $[-a, a]$;

b) dacă funcția $f(x)$ este impară pe $[-a, a]$, atunci toate primitivele ei sunt funcții pare pe $[-a, a]$.

4.16. Fie $f(x)$ continuă și periodică cu perioada T. Să se demonstreze că integrala $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx$ nu depinde de parametrul a.

§ 3. *Integrale improprii*

Deosebim integrale improprii cu limite infinite de integrare și integrale improprii de la funcții nemărginite.

1. *Integrale improprii cu limite infinite de integrare sau integrale improprii de speța 1.*

Dacă funcția $y=f(x)$ este definită pe $[a, +\infty[$ și integrabilă pe orice segment $[a, b]$ din acest interval, atunci $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ se numește *integrală improprie* de la funcția $f(x)$ pe $[a,+\infty[$. Se notează astfel: $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

În mod analog se definesc integralele improprii de forma:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \quad \text{și}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

Dacă limitele respective există și sunt finite, atunci inte-

gralele improprii de speța 1 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ se numesc *convergente*. În caz contrar integralele se numesc *divergente*.

Integralele improprii de speța 1 au următoarele proprietăți:

1. Formula Newton-Leibniz $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$,

dacă *f(x), F(x)* sunt continue pe $[a,+\infty[$ și $F'(x) = f(x)$ pentru orice x din $[a,+\infty[$.

2. Metoda substituției: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, dacă *f(x)* este continuă pe $[a,+\infty[$, $x = \varphi(t)$ împreuna cu derivata ei $\varphi'(t)$ sunt continue pe $[\alpha,+\infty[$ și $a = \varphi(\alpha)$, $\varphi(+\infty) = +\infty$.

3. Integrarea prin părți: $\int_a^{+\infty} udv = (uv)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu$, dacă $u=u(x)$, $v=v(x)$ sunt continue împreună cu derivatele lor pe $[a,+\infty[$.

4. Dacă $0 \le f(x) \le g(x)$, pentru orice $x \in [a,+\infty[$, atunci din convergența integralei $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ rezultă convergența integralei $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ și din divergența integralei $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ rezultă divergența integralei $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

5. Dacă integrala $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ este convergentă, atunci $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este de asemenea convergentă.

În cazul acesta se afirmă că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este *absolut convergentă*. Dacă însă integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă, iar integrala $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ este divergentă, atunci se spune că integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este *semiconvergentă*.

6. Dacă $f(x)>0$, $g(x)>0$ pentru orice $x \in [a,+\infty[$ şi limita limită $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, atunci convergenţa (divergenţa) integrală $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ implică convergenţa (divergenţa) integralei $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

7. Dacă funcţia $f(x)>0$ este o funcţie infinit mică când $x \to +\infty$ şi limita finită $\lim_{x\to+\infty} x^k f(x) \neq 0$, atunci integrala $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cu $a>0$ converge pentru $k>1$ şi diverge pentru $0 < k \leq 1$.

Proprietăţile $1-7$ sunt valabile şi pentru integralele de forma $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

2. *Integrale improprii pentru funcţii nemărginite sau integrale improprii de speţa 2.*

Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe $[a,b[$, iar în punctul $x=b$ funcţia $f(x)$ este nemărginită, atunci limita $\lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)dx$ se numeşte *integrală improprie de speţa 2.*

În mod analog, dacă $f(x)$ este continuă pe $]a,b]$ şi în punctul $x=a$ funcţia este nemărginită, atunci limita $\lim_{c\to a+0} \int_c^b f(x)dx$ se numeşte *integrală improprie de speţa 2.*

Dacă $f(x)$ este continuă pe $[a,b]$ în afară de punctul $c \in]a,b[$ şi nemărginită în vecinătatea lui c, atunci suma $\lim\limits_{d\to c-0}\int\limits_a^d f(x)\,dx +$

$+ \lim\limits_{d\to c+0}\int\limits_d^b f(x)dx$ se numeşte *integrală improprie de speţa 2.*

Dacă limitele respective există şi sunt finite, atunci integralele improprii se numesc *convergente.* În caz contrar, integralele improprii se numesc *divergente.*

Integralele improprii de speţa 2 au proprietăţi analogice proprietăţilor 1-7 din 1).

Menţionăm unele din ele:

1* $\lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx = F(b-0)-F(a)$, dacă

$F'(x)=f(x), x\in[a,b[$.

4* Dacă $0\le f(x)\le g(x)$ pentru orice $x\in[a,b[$, atunci din convergenţa integralei improprii de la funcţia $g(x)$ rezultă convergenţa integralei improprii de la funcţia $f(x)$ şi din divergenţa integralei improprii de la $f(x)$ rezultă divergenţa integralei improprii de la funcţia $g(x)$.

7* Dacă $f(x)>0$ pentru orice $x\in[a,b[$ este o funcţie infinit mare când $x\to b-0$ şi limita finită $\lim\limits_{x\to b-0}(b-x)^k f(x)\neq 0$, atunci integrala improprie de la $f(x)$ converge pentru $0<k<1$ şi diverge pentru $k\ge 1$.

Proprietăţile 1^*-7^* sunt valabile şi pentru celelalte integrale improprii de speţa 2.

Probleme rezolvate

1. Să se cerceteze convergenţa integralelor:

a) $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^k}, a>0,$ b) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

Rezolvare.

a) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b x^{-k}dx = |k \neq 1| = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} \right) \Big|_a^b =$

$$= \frac{1}{1-k} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{a^{k-1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{a^{k-1}(k-1)}, & \text{dacă } k>1 \\ \infty, & \text{dacă } k<1. \end{cases}$$

Dacă însă $k=1$, obținem $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_a^b = \infty$

Prin urmare, această integrală converge pentru $k>1$ și diverge pentru $k \leq 1$.

Notă. Funcția $f(x) = \frac{1}{x^k}$ servește ca funcție etalon în aplicarea proprietăților 4* și 6*.

b) Din inegalitatea $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ rezultă că $2x + 1 \geq -x^2$.

Deci $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

Calculăm integrala improprie:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x+1}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-2x} \cdot e \cdot dx = e \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2e^{2x}} \right) \Big|_0^b$$

$$= e \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2e^{2b}} + \frac{1}{2} \right) = e\left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{e}{2}.$$ Această înseamnă că $\int_0^{+\infty} e^{-2x+1}dx$ este convergentă.

Aplicând proprietatea 4 pentru funcțiile $f(x) = e^{-x^2} \leq g(x) = e^{-2x+1}$ pe $[0,+\infty[$ obținem că din convergența integralei $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$, rezultă convergența integralei $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Remarcăm că convergența acestei integrale nu poate fi stabilită cu ajutorul formulei Newton-Leibniz, deoarece primitiva funcției

$f(x)=e^{-x^2}$ nu poate fi exprimtă cu ajutorul funcțiilor elementare.

2. Să se cerceteze convergența integralei:

a) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$, $(k>0)$; b) Integrala Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$.

Rezolvare.

a) Pentru funcția $f(x)=\frac{1}{b-x}$ punctul $x=b$ este un punct de discontinuitate de speța a 2. Deci această integrală nu este obișnuită, ci este o integrală improprie de speța 2. Avem

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}=\lim_{c\to b-0}\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^k}=|k\neq 1|=\lim_{c\to b-0}\left[\frac{-1}{(1-k)(b-x)^{k-1}}\right]\Bigg|_a^c$$

$$=\frac{1}{k-1}\lim_{c\to b-0}\left[\frac{1}{(b-c)^{k-1}}-\frac{1}{(b-a)^{k-1}}\right]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-k)(b-a)^{k-1}}, & \text{dacă } 0<k<1\\ \infty, & \text{dacă } k>1.\end{cases}$$

Dacă însă $k=1$, obținem

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x}=\lim_{c\to b-0}\int_a^c \frac{dx}{b-x}=\lim_{c\to b-0}\left[-\ln(b-x)\right]\Big|_a^c=\infty.$$

Prin urmare, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ este convergentă pentru $0<k<1$ și divergentă pentru $k\geq 1$.

Această funcție $\left(f(x)=\frac{1}{(b-a)^k}\right)$ servește ca funcție etalon în aplicarea proprietăților 4* și 6*.

Notă. Integrala improprie $\int_0^b \frac{dx}{x^k}$ converge pentru $0<k<1$ şi diverge pentru $k \geq 1$.

b) $\int_0^{+\infty} sin\left(x^2\right)dx = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{t}, \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ t \in [0,+\infty[\end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt +$

$+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$

Prima integrală reprezintă o integrală improprie de speţa 2, iar integrala a doua – o integrală improprie de speţa 1.

Observăm că $0 \leq \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ pentru orice $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Aplicînd proprietatea 4* şi nota de mai sus, conchidem că din convergenţa integralei improprii $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ $\left(k = \frac{1}{2} < 1\right)$ rezultă convergenţa integralei improprii $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$

Studiem convergenţa integralei a doua:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \left| \begin{array}{l} t^{\frac{-1}{2}} = u, du = -\frac{dt}{2\sqrt{t^3}} \\ \sin t\, dt = dv \\ v = -\cos t \end{array} \right| = \left(-\frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\right)\Big|_{\pi/2}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos dt}{\sqrt{t^3}} =$$

$$= 0 - 0 - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t dt}{\sqrt{t^3}}.$$

Avem $\left|\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t^3}}$.

Conform proprietății 4, din convergența integralei $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3}} \left(k = \frac{3}{2} > 1\right)$ rezultă convergența integralei $\int_{\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\right| dt$, care în conformitate cu proprietatea 5 implică convergența integralei $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} dt$.

Prin urmare, integrala $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ ca sumă a două integrale convergente este convergentă.

Probleme propuse spre rezolvare

4.17. Să se calculeze integralele improprii de speța 1:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-px} dx$,

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$,

c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$,

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$,

e) $\int_0^{+\infty} \frac{arctg\, x}{1 + x^2} dx$,

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$,

g) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$,

h) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x\, dx$,

i) $\int_1^{+\infty} \frac{1 + 2x}{x^2(1 + x)} dx$,

j) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$,

k) $\int_0^{+\infty} x \cos x\, dx$,

l) $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$,

m) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$,

n) $\int_1^{+\infty} \frac{arctg\, x}{x^2} dx$,

o) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$,

p) $\int_0^{+\infty} \cos \pi x dx$,

r) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + x^3}$,

s) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(4x^2 + 1)^3}}$,

t) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + x)^2}$,

u) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

4.18. Să se cerceteze convergența integralelor improprii de speța 1:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin x}$, b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$,

c) $\int_1^{+\infty} \frac{tg\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$, d) $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^4}dx$,

e) $\int_1^{+\infty} \frac{(x+\sqrt{x+1})dx}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}$, f) $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}dx$,

g) $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^2-1}}dx$, h) $\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$,

i) $\int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin x}{x^5+\sqrt[3]{x-1}}dx$, j) $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$,

k) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5+1}}dx$, l) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$,

m) $\int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+7x+6}}$, n) $\int_{0,6}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+8}}$,

o) $\int_{0,7}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$, p) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

4.19. Să se calculeze integralele improprii de speța 2:

a) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)}}$, b) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, c) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$,

d) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$, e) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$, f) $\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x^5}}dx$,

g) $\int_0^{\pi/2} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$, h) $\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, i) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x}$,

j) $\int_{-3}^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$, k) $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$, l) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$,

m) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$, n) $\int_{-1}^{0} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x^3}$, o) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$,

p) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$.

4.20. Să se cerceteze convergența integralelor improprii de speța 2:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$, b) $\int_0^5 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$, c) $\int_0^2 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^2}\right)}{e^{\sin x}-1} dx$,

d) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$, e) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[4]{x}}-1}$, f) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x}-\sin x} dx$,

g) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx$, h) $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$, i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+4x^4}$,

j) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[5]{1-x^2}}$, k) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4-1}$, l) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$,

m) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$, n) $\int_0^1 \frac{tg\,x\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

4.21. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba $y=\frac{1}{1+x^2}$ și asimptota ei.

4.22. Să se demonstreze că aria figurii mărginită de curba $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, de axele de coordonate și de asimptota $x=1$ a curbei este egală cu $\frac{\pi}{2}$.

4.23. Să se demonstreze că aria figurii mărginită de curba $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, axa OX şi dreptele $x=1$, $x=-1$ este egală cu 6, iar aria figurii mărginită de curba $y = \frac{1}{x^2}$, de axa OX şi dreptele $x=1$, $x = -1$ este infinită.

4.24. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ şi asimptota ei.

§ 4. Aplicaţiile integralei definite

Integrala definită se aplică în geometrie la rezolvarea următoarelor probleme:

G1. *Calcularea ariilor în coordonate carteziene dreptunghiulare.*

Reieşind din sensul geometric al integralei definite, avem: dacă funcţia $f:[a,b] \to R^+$ este continuă pe [a, b] cu $a < b$, atunci aria trapezului curbiliniu, mărginit de curba $y=f(x)$, axa OX şi dreptele $x=a$, $x=b$ este egală cu $\int_a^b f(x)dx$.

Dacă $f:[a,b] \to R^-$ este continuă pe $[a, b]$ cu $a<b$, atunci $\int_a^b f(x)dx \le 0$ şi aria trapezului este egală cu $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. Dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ cu $a<b$ şi îşi schimbă semnul pe $[a, b]$ de un număr finit de ori, atunci aria figurii mărginită de curba $f(x)$, dreptele $x=a$, $x=b$ şi axa OX este egală cu $\int_a^b |f(x)|dx$.

Dacă $y=f(x)$ este definită parametric $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, unde $a = \varphi(\alpha)$ şi $b = \varphi(\beta)$, atunci aria trapezului este egală cu $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$, unde $f(x)$ este continuă pe [a, b], iar $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ şi $\psi(t)$ sunt continue pe $[\alpha,\beta]$.

Dacă trebuie să calculăm aria figurii mărginite de curbele $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ şi dreptele $x=a$, $x=b$ cu condiţia că $f_1(x) \le f_2(x)$ pe $[a, b]$, atunci aplicăm formula $S = \left| \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \right|$. Funcţiile $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ se consideră continue pe $[a, b]$.

G2. *Aria unui sector curbiliniu în coordonate polare mărginit de curba continuă* $\rho = f(\theta)$ pe $[\alpha, \beta]$ *şi razele* $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ *($\alpha<\beta$) se calculează după formula:* $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta$.

G3. *Lungimea unui arc de curbă.*

a) Dacă $y = f(x)$ are derivată continuă pe $[a,b]$, $a < b$, atunci lungimea L a arcului curbei $y = f(x), x \in [a,b]$ se exprimă prin formula $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$;

b) Lungimea L a arcului curbei parametrice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, unde funcţiile $\varphi'(t), \psi'(t)$ sunt continue pe $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, se exprimă prin formula $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$;

c) Pentru calcularea lungimii L a arcului mărginit de curba polară $\rho = f(\theta), \theta \in [\alpha, \beta], \alpha < \beta$, unde $f'(\theta)$ este continuă pe $[\alpha, \beta]$, se foloseşte formula $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta$.

G4. *Volumul unui corp.*

a) Fie T un corp oarecare. Presupunem că se ştie aria secţiunilor acestui corp cu plane perpendiculare pe axa OX, adică $S=S(x)$, unde $S(x)$ şi este continuă pe $[a, b]$ cu $a < b$. Volumul acestui corp se calculează cu ajutorul formulei $V = \int_a^b S(x)\,dx$;

b) Dacă considerăm un corp generat la rotaţia unui trapez curbiliniu mărginit de curba $y = f(x)$ [funcţia $f(x)$ se consideră

nenegativă şi continuă pe $[a, b]$ cu $a < b$], axa OX şi dreptele $x=a$, $x=b$ se efectuează în jurul axei sale, atunci funcţia $S(x)$ din formula precedentă reprezintă aria cercului de raza $r=f(x)$, $x \in [a,b]$ şi volumul acestui corp este egal cu $V_{OX} = \pi \int_a^b r^2 dx = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx;$

c) Dacă rotaţia trapezului curbiliniu din punctul precedent se efectuează în jurul axei OY, atunci volumul corpului obţinut se calculează cu ajutorul formulei $V_{OY} = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx;$

d) Dacă rotaţia trapezului curbuliniu mărginit de curba $x = \varphi(y)$ [funcţia $\varphi(y)$ se consideră nenegativă şi continuă pe $[c, d]$ cu $c < d$] axa OY şi dreptele $y=c$, $y=d$, se efectuează în jurul axei OY, atunci volumul corpului obţinut se calculează după formula $V_{OY} = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \left[\varphi(y)\right]^2 dy;$

e) Volumul corpului de rotaţie a figurii mărginită de curbele $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ şi de dreptele $x=a$, $x=b$ în jurul axei OX se exprimă cu ajutorul formulei $V_{OX} = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] dx,$ unde $f_1(x), f_2(x)$ sunt continue pe $[a, b]$ şi $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$ cu $a < b$.

G5. *Aria suprafeţei de rotaţie.*

Fie funcţia $y=f(x)$ nenegativă şi $f'(x)$ continuă pe $[a, b]$ cu $a < b$. Aria suprafeţei obţinute prin rotaţia graficului acestei funcţii în jurul axei OX poate fi calculată conform formulei

$$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx.$$

Similar, dacă $x=f(y)$ este nenegativă şi $f'(y)$ este continuă pe $[c, d]$ cu $c < d$, atunci aria suprafeţei obţinute prin rotaţia graficului acestei funcţii în jurul axei OY se calculează cu ajutorul formulei

$$S_{oy} = 2\pi \int_c^d f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy.$$

Integrala definită poate fi aplicată şi la rezolvarea unor probleme de fizică.

Înainte de a trece la rezolvarea unor probleme de fizică, prezentăm următoarea schemă de aplicare a integralei definite pentru determinarea unei mărimi oarecare u:

1) exprimăm mărimea variabilă u în dependenţă de o caracteristică x a ei;

2) din condiţiile problemei găsim intervalul variaţiei acestei caracteristici;

3) pentru funcţia obţinută $u = u(x),\ x \in [a,b]$ calculăm creşterea ei Δu, ce corespunde creşterii infinit mici Δx a argumentului x;

4) înlocuim Δu prin $du\,(\Delta u = du)$. Menţionăm că înlocuirea aceasta trebuie argumentată, adică trebuie de demonstrat că $\lim\limits_{\Delta x \to 0} |\Delta u - du| = 0$ şi că expresia pentru Δu este liniară în raport cu Δx;

5) mărimea u se calculează după formula: $u = \int_a^b du.$

Vom examina următoarele probleme din fizică.

F1. Reieşind din sensul fizic al integralei definite, avem că lucrul efectuat de forţa $F=F(x)$, considerată ca funcţie continuă pe $[a, b]$, la deplasarea unui punct material din poziţia $x=a$, în poziţia $x=b$ $(a < b)$, este egal cu $A = \int_a^b F(x)dx$, dacă direcţia forţei F coincide cu direcţia axei OX.

F2. Dacă linia (cablul) materială este graficul funcţiei $y = f(x), x \in [a,b]$ cu derivata $f'(x)$ continuă pe $[a, b]$, şi are densitatea liniară $\gamma(x) > 0$, considerată ca o funcţie nenegativă şi continuă pe $[a, b]$, cu $a<b$, atunci

a) masa acestei linii materiale se calculează după formula:

$$M = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

b) momentele statice în raport cu axele de coordonate se calculează după formulele:

$$M_{OX} = \int_a^b y\gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad M_{OY} = \int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

c) momentele de inerţie în raport cu OX şi OY se calculează după formulele:

$$I_{OX} = \int_a^b y^2\gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad I_{OY} = \int_a^b x^2\gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

d) coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_c = \frac{M_{OY}}{M} = \frac{\int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx},$$

$$y_c = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{\int_a^b y\gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}.$$

Notă. Dacă linia materială este omogenă, atunci: $x_c = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, $y_c = \frac{1}{L}\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, unde L este lungimea liniei materiale.

1.3. Dacă figura (placa) materială este mărginită de curbele $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, care sunt funcţii continue pe $[a, b]$, cu $f_1(x) \le f_2(x)$ pe $[a,b]$, de dreptele $x=a$, $x=b$ şi are densitatea de suprafaţă $\gamma(x) > 0$, continuă pe $[a, b]$, cu $a<b$, atunci

a) masa acestei plăci plane este egală cu

$$M = \int_a^b \gamma(x)\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx;$$

b) Momentele statice ale ei în raport cu OX şi OY se calculează după formulele:

$$M_{OX} = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx,$$

$$M_{OY} = \int_a^b x\,\gamma(x)\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx;$$

c) Momentele de inerţie ale ei în raport cu axa OX şi axa OY se calculează după formulele:

$$I_{OX} = \frac{1}{3}\int_a^b \gamma(x)\left[f_2^3(x) - f_1^3(x)\right]dx,$$

$$I_{OY} = \int_a^b x^2\gamma(x)\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx.$$

d) Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_c = \frac{M_{OY}}{M} = \frac{\int_a^b x\cdot\gamma(x)\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}{\int_a^b \gamma(x)\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx};$$

$$y_c = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx}{\int_a^b \gamma(x)\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx}.$$

Notă. Dacă placa plană este omogenă, atunci:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx,$$

unde S este aria plăcii plane.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba inchisă $y^2 = x^2(1-x^2)$.

Rezolvare. Aflăm punctele de intersecţie cu axa OX: $x^2(1-x^2) = 0$, adică $x_1 = 0, x_2 = \pm 1$.

Întrucât curba este simetrică față de axele de coordonate și originea sistemului de coordonate, aria ei este:

$$S = 4\int_0^1 y\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)}dx = 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$\left|\begin{array}{l} 1-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ t\in[1,0] \end{array}\right| = 4\left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = (-2)\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_1^0 = -\frac{4}{3}(0-1) = \frac{4}{3}.$$

2. Să se calculeze aria figurii mărginită de elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Rezolvare. Întrucât elipsa este simetrică față de axele OX, OY și originea de coordonate, avem

$$S = 4\int_0^a y\,dx = \left|\begin{array}{l} y = b\sin t \\ x = a\cos t \\ dx = -a\sin t\,dt \\ t\in\left[\frac{\pi}{2},0\right] \end{array}\right| = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

3. Să se calculeze lungimea curbei închise $\rho = \sin^4\left(\frac{\theta}{4}\right)$.

Rezolvare. Întrucât curba dată este pară, rezultă că ea este simetrică față de axa polară. Funcția $\sin^4\left(\frac{\theta}{4}\right)$ este periodică cu perioada 4π. Deci $L = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^8\frac{\theta}{4}+\sin^6\frac{\theta}{4}\cos^2\frac{\theta}{4}} =$

$$= 2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{4}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{4}+\cos^2\frac{\theta}{4}}\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}\,d\theta =$$

$$2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{4}\right)\sin\frac{\theta}{4} = -8\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{4}\right)d\left(\cos\frac{\theta}{4}\right) =$$

$$= -8\left(\cos\frac{\theta}{4} - \frac{\cos^3\frac{\theta}{4}}{3} \right)\Big|_0^{2\pi} = -8\left(0 - 0 - 1 + \frac{1}{3}\right) = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

4. Să se calculeze volumul corpului mărginit de hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ şi planele $z=0$, $z=1$.

Rezolvare. Considerăm secţiunile corpului dat cu planele perpendiculare pe axa OZ, adică aria secţiunii $S = S(z)$, $z \in [0,1]$.

În secţiune avem figuri mărginite de elipsele $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + z^2$ sau $\frac{x^2}{(2\sqrt{1+z^2})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{1+z^2})^2} = 1$ ariile cărora sunt:

$S = \pi ab = \pi \cdot 2\sqrt{1+z^2} \cdot 3\sqrt{1+z^2} = 6\pi(1+z^2)$, unde $z \in [0,1]$.

Volumul corpului dat este:

$$V = \int_0^1 S(z)dz = \int_0^1 6\pi\left(1+z^2\right) = 6\pi\left(z + \frac{z^3}{3} \right)\Big|_0^1 = 6\pi\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 8\pi.$$

5. Să se calculeze volumul unui corp obţinut prin rotaţia în jurul axei OX a figurii mărginită de circumferinţa $x^2 + y^2 = 1$ şi dreapta $x+y=1$.

Rezolvare. Aflăm punctele de intersecţie ale circumferinţei cu dreapta, adică rezolvăm sistemul: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$

Obţinem punctele $M(0, 1)$ şi $N(1, 0)$.

Calculăm volumul corpului după formula:

$$V_{OX} = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx = \pi\int_0^1 \left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - (1-x)^2 \right] dx =$$

$$= \pi\int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx = \pi\left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)\Big|_0^1 = \pi\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

6. Să se calculeze lucrul necesar pentru a întinde un resort elastic cu 2 m, dacă se ştie că pentru a-l întinde cu 1 m este nacesară o forţă de 10 kG.

Rezolvare. După legea Hooke, avem că forţa necesară pentru a întinde un resort de lungimea dată L până la lungimea $(L+x)$ este proporţională cu lungimea x, adică $F=kx$. Constanta k o aflăm din condiţiile problemei: $10=k\cdot 1$, adică $k=10$.

Prin urmare, lucrul $A=\int_a^b F(x)dx=\int_0^2 kxdx=\int_0^2 10xdx=20(KGm)$.

7. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa OX a unei figuri (plăci) plane materiale omogene $(\gamma=const=1)$ mărginită de elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Din ecuaţia elipsei obţinem $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$. Folosind formula respectivă, avem

$$I_{OX}=\frac{1}{3}\int_a^b \gamma(x)\left[f_2^3(x)-f_1^3(x)\right]dx=\frac{1}{3}\int_{-a}^{a}1\left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^3-\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^3\right]dx=\frac{b^3}{3a^3}\int_{-a}^{a}2\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x=a\sin t\\ dx=a\cos t dt\\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right|=\frac{2}{3}\frac{b^3}{a^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3\cos^3 t\,a\cos t dt=$$

$$=\frac{2}{3}ab^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt=\frac{ab^3}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\,dt=$$

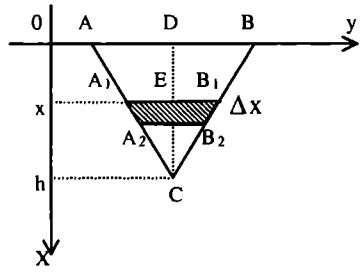
$$=\frac{ab^3}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{ab^3}{6}\left(t+\sin 2t+\frac{1}{2}t+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin 4t}{8}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab^3}{6}\left(\pi+0+\frac{1}{2}\pi+0\right)=\frac{ab^3}{6}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi ab^3}{4}.$$

8. Un triunghi cu baza $b=3\ m$ şi înălţimea $h=2\ m$ este scufundat vertical în apă astfel încât baza se află pe suprafaţa apei. Să se calculeze presiunea hidrostatică suportată de triunghi.

Rezolvare. Orientăm sistemul cartezian rectangular de coordonate astefel încât axa OY să coincidă cu baza triunghiului.

La rezolvarea problemei folosim schema de la începutul acestui paragraf.



Observăm că presiunea hidrostatică p depinde de grosimea stratului apei, pe care o notăm prin $x\ (x \in [0,h])$. Deci $p=p(x)$. Calculăm Δp, ce corespunde creşterii Δx a argumentului x.

Considerăm porţiunea de suprafaţă $A_1\ A_2\ B_2\ B_1$ cu grosimea Δx situată la adâncimea $DE=x$. Întrucât Δx este o mărime infinit mică, porţiunea aceasta de suprafaţă poate fi considerată ca un dreptunghi cu dimensiunile Δx şi $A_1\ B_1$. Din triunghiurile asemenea ΔACB şi ΔA_1CB_1 obţinem $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{DC}{EC}$ sau $\dfrac{b}{A_1B_1}=\dfrac{h}{h-x}$, de unde $A_1B_1=\dfrac{b}{h}(h-x)$. Deci aria dreptunghiului $A_1A_2B_2B_1$ este egală cu: $\Delta S = A_1B_1 \cdot \Delta x = \dfrac{b}{h}(h-x)\Delta x$.

Observăm că dacă Δx este un infinit mic, atunci ΔS de asemenea este o mărime infinit mică, adică $\Delta S \approx dS$. Conform legii Pascal, asupra porţiunii de suprafaţă $A_1\ A_2\ B_2\ B_1$, situată la adâncimea x, este exercitată o presiune egală cu $\Delta p \approx \gamma g x dS$, unde γ – densitatea apei, iar g – acceleraţia căderii libere. Eroarea $(\Delta p - dp)$ este o mărime infinit mică când $\Delta x \to 0$ şi Δp este liniar în raport cu Δx.

Prin urmare, presiunea hidrostatică este egală cu:

$$p = \int_0^h dp = \int_0^h \gamma g x \cdot \frac{b}{h}(h-x)dx = \frac{\gamma g b}{h}\int_0^h x(h-x)dx =$$

$$= \frac{\gamma g b}{h}\left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h = \frac{\gamma g b h^2}{6}.$$

Înlocuind valorile numerice: $b = 3\ m$, $h = 2\ m$, $\gamma = 1000\,{}^{kg}/_{m^3}$, $g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$, obținem

$$P = \frac{3 \cdot 4}{6} \cdot 1000 \cdot 10 = 20.000(N) = 20(kN).$$

Probleme propuse spre rezolvare

4.25. Să se calculeze aria figurii mărginită de:

a) curbele $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$ şi dreptele $x=0$, $x=2$,

b) curbele $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$,

c) curbele $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$,

d) parabola $y = -x^2 - 2x + 3$, tangenta ei în punctul $M(2, -5)$ şi axa OY,

e) parabolele $y = 4x^2$, $y = \frac{x^2}{9}$ şi dreapta $y=2$,

f) curba închisă $y^2 = (1 - x^2)^3$,

g) astroida $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$,

h) arcul cicloidei $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$ şi axa OX,

i) cardioida $x = 2\cos t(1 + \cos t)$, $y = 2\sin t(1 + \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

j) circumferinţele $\rho = 3\sqrt{3}\cos\theta$, $\rho = 3\sin\theta$,

k) cardioida $\rho = 1 - \cos\theta$ şi circumferinţa $\rho = 1$,

l) curbele $x^2 + y^2 - 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$ şi dreptele $y=x$, $y=-x$.

4.26. Să se calculeze lungimea arcului mărginit de:

a) curba $y = \sqrt{x^3}$, $x \in [0, 4]$;

b) curba $y = \ln\cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

c) curba $y = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in [1, 2]$;

d) curba $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y,\ y \in [1,2]$;

e) curba $y = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})],\ x \in [1,5]$;

f) cicloida $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t \in [0,2\pi]$;

g) astroida $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t \in [0,2\pi]$;

h) curba parametrică $x = \frac{t^6}{6},\ y = 2 - \frac{t^4}{4}$ şi punctele de intersecţie cu axele de coordonate;

i) curba polară $\rho = e^{\theta},\ \theta \in [0,1]$;

j) curba polară $\rho = \frac{2}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)},\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;

k) curba polară $\theta = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right),\ \rho \in [2,4]$.

4.27. Să se calculeze aria suprafeţei laterale şi volumul corpului obţinut prin rotaţia figurii mărginită de:

a) curba $y = \frac{x^3}{3},\ (x \in [-2,2])$, în jurul axei OX,

b) curba $x = 2ch\frac{y}{2},\ (y \in [-2,2])$, în jurul axei OY;

c) parabola $y^2 = 4 + x,\ (x \in [-4,2])$, în jurul axei OX,

d) curba $y = \ln x,\ (x \in [1,e^2])$, în jurul axei OY;

e) curba $y = \sin x,\ (x \in [0,\pi])$, în jurul axei OX,

f) parabola $y^2 = 4x,\ (x \in [0,2]$, în jurul axei OX,

g) circumferinţa $x^2 + y^2 = R^2$, în jurul axei OY.

4.28. Să se afle volumul corpului generat la rotaţia figurii mărginită de:

a) parabolele $y = x^2,\ x = y^2$ în jurul axei OX,

b) parabola $y^2 = 9x$ şi dreapta $y=-x$ în jurul axei OY.

c) curbele $y = 2^x,\ y = 4^x$ şi dreapta $x=1$ în jurul axei OX,

d) curbele $x^2 + y^2 = 18$, $y = \frac{x^2}{3}$, $x = 0$ în jurul axei OX,

e) curbele $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = -2$ în jurul axei OY,

f) astroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ în jurul axei OX,

g) curba $y = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$ în jurul axei OX.

4.29. Să se afle volumul corpului mărginit de:

a) elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$;

b) suprafața conică $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{(z-2)^2}{1} = 0$ și planul $z=0$;

c) cilindrul parabolic $z = 4 - y^2$ și planele $x=0$, $z=0$ și $x=a$;

d) cilindrul circular $x^2 + y^2 = 9$ și planul ce trece prin diametrul bazei lui și formează un unghi de 60° cu planul bazei;

e) de sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$;

f) paraboloidul eliptic $z = x^2 + 6y^2$ și planul $z=3$.

4.30. Să se calculeze forța de presiune ce acționează asupra:

a) unui semicerc cu raza $r=3$ *m*, scufundat vertical în apă, diametrul căruia se află la suprafața apei;

b) unui triunghi cu baza $b=3$ *m* și înălțimea $h=4$ *m*, scufundat vertical în apă, astfel încât vîrful lui se află la suprafața apei;

c) unui stăvilar (ecluză) de forma unui trapez cu baza de sus $b = 70$ *m*, baza de jos $a=20$ *m* și înălțimea $h=21$ *m*.

În problemele de mai sus să se considere densitatea apei $\gamma = 1000\,{}^{kg}/_{m^3}$ și $g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$.

4.31. Să se calculeze lucrul mecanic pentru întinderea unui resort elastic cu 5 cm, știind că pentru a-l întinde cu 1 cm este necesară o forță mecanică de 1 kG.

4.32. Să se calculeze lucrul mecanic pentru a ridica un corp cu masa de 5 kg la înălțimea de 100 m ($g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$).

4.33. Să se determine distanța parcursă de un punct material în decursul a 4 s după începerea mișcării rectilinii, dacă viteza acestei mișcări se exprimă cu ajutorul formulei $v = (3t^3 - 2t)^{m}/_{s}$.

4.34. De la o înălțime de 300 m se aruncă în jos un corp cu viteza inițială $v = 20^{m}/_{s}$. Peste cât timp corpul va atinge pământul? $(g = 10^{m}/_{s^2})$.

4.35. Viteza unei mișcări rectilinii are forma $v = 2(6-t)^{m}/_{s}$. Să se calculeze distanța parcursă de punctul material pe intervalul de timp $[t_1, t_2]$ cu $t_1 = 2s$ și $t_2 = 6s$..

4.36. Să se calculeze masa liniei (cablului) materiale mărginită de:

a) $y = \ln x, x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$, dacă densitatea ei $\gamma = 2x^2$;

b) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, x \in [1, \sqrt{3}]$, dacă densitatea ei $\gamma = 4x^2$;

c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in [0,1]$, dacă densitatea ei coincide numeric cu ordonata punctului material;

d) $y = \ln\frac{1}{1-x^2}, x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, dacă densitatea ei $\gamma = 1 - x^2$.

4.37. Să se calculeze momentele statice în raport cu axele OX și OY ale liniilor materiale omogene $(\gamma = const = 1)$ mărginite de:

a) parabola $y^2 = 2x, x \in [0,2]\ (y > 0)$;

b) dreapta $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, x \in [0,4]$;

c) curba $y = 2ch\frac{x}{2}. x \in [0,1]$;

d) astroida $x = 5\sin^3 t, y = 5\cos^3 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.38. Să se determine momentele de inerție în raport cu axa OX ale liniilor materiale omogene $(\gamma = const = 1)$ mărginite de:

a) semicircumferința $y = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2,2]$;

b) curba $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $x \in [0,2]$;

c) cicloida $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

d) curba $y = e^x$, $x \in [0,1]$.

4.39. Să se calculeze centrul de greutate al liniei materiale omogene ($\gamma = const = 1$) mărginită de:

a) semicircumferința $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$, $x \in [-\pi, \pi]$;

b) lănțișorul $y = 3ch\frac{x}{3}$, $x \in [0,3]$;

c) cicloida $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

d) astroida $x = 10\sin^3 t$, $y = 10\cos^3 t$, $t \in [0, \pi]$, situată în cadranele 1 și 2.

e) cardioida $\rho = 5(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, situată în cadranele 1 și 2.

4.40. Să se afle masa figurii (plăcii) plane materiale omogene ($\gamma = const = 1$) mărginită de:

a) parabolele $y = x^2 - 6x + 10$, $y = 6x - x^2$ și dreapta $x = -1$;

b) curbele $y = e^x$, $y = e^{-x}$ și dreapta $x=1$;

c) hiperbola $xy=a^2$, axa OX și dreptele $x=a$, $x=2a$, $(y>0, a>0)$;

d) parabolele $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

4.41. Să se calculeze momentul static în raport cu axa OX al figurii (plăcii) plane materiale omogene ($\gamma = const = 1$) mărginită de:

a) curbele $y = \frac{2}{1 + x^2}$, $y = x^2$;

b) parabolele $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;

c) sinusoida $y = \sin x$, axa OX și dreapta $y = \frac{1}{2}$;

d) elipsa $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și axele de coordonate.

4.42. Să se determine momentul de inerție în raport cu axa OY al figurii (plăcii) plane materiale omogene ($\gamma = const = 1$) mărginită de:

a) dreapta $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ şi axele de coordonate:

b) parabola $y=x^2$, axa OX şi dreapta $x=2$;

c) elipsa $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi axele de oordonate;

d) curba $y=3ch\frac{x}{3}$, dreptele $x=-3$, $x=3$ şi axa OX.

4.43. Să se afle centrul de greutate al figurii (plăcii) plane omogene ($\gamma=const=1$) mărginită de:

a) curba $y=\cos x$, axele de coordonate şi dreapta $x=\frac{\pi}{2}$,

b) parabola $y=2x-x^2$ şi axa OX;

c) cicloida $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$ şi axa OX;

d) parabola $y=x^2$ şi dreptele $y=3x$, $x=1(0\le x\le 1)$.

Probleme diverse

4.44. Interiorul cercului de ecuaţia $x^2+y^2=16$ este despărţit de parabola $y^2=6x$ în două regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.

4.45. Interiorul elipsei de ecuaţia $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ este despărţit de hiperbola de ecuaţia $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ în trei regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia din ele.

4.46. Să se calculeze volumul corpurilor de rotaţie generate de curba $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}$, $x\in[0,1]$, în jurul axelor de coordonate.

4.47. Să se calculeze lungimea arcului curbei $y=\frac{x^2}{4}-\ln\sqrt{x}$, $x\in[1,e]$.

4.48. Să se calculeze aria suprafeței laterale și volumul corpului de rotație generat de curba $y=\frac{1}{3}\sqrt{x(3-x)^2}$, $x\in[0,3]$, în jurul axei OX.

4.49. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat la pomparea apei dintr-o cavitate semisferică cu raza $R=10\ m$.

4.50. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat la pomparea apei dintr-un rezervor cilindric vertical de raza R și înălțimea H.

4.51. Să se afle coordonatele centrului de greutate al liniei materiale omogene ($\gamma = const = 1$) mărginită de curba polară $\rho = a\cdot e^{\theta}, \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

4.52. Să se determine coordonatele centrului de greutate al luguri (plăcii) plane materiale ($\gamma = const = 1$) mărginită de curba închisă $y^2 = 10x^3 - x^4$.

4.53. Să se demonstreze că lungimea arcului sinusoidei $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ este egală cu lungimea arcului elipsei $x^2+\frac{y^2}{2}=1$.

4.54. Să se demonstreze că lungimea arcului liniei

$$\begin{cases} x = f''(t)\cos t + f'(t)\sin t, \\ y = -f''(t)\sin t + f'(t)\cos t, \end{cases} t\in[t_1,t_2],$$

unde $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ sunt continue pe $[t_1, t_2]$, este egală cu $\left|f'(t_2)+f''(t_2)-f(t_1)-f''(t_1)\right|$. Să se aplice acest rezultat la calcularea lungimii arcului liniei

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t+\sin t), \\ y = e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} t\in[0,1].$$

4.55. Să se calculeze volumul corpului de rotație generat la rotația liniei (loconul Aniezi cu $a=\frac{1}{2}$) $y=\frac{1}{1+x^2}$ în jurul asimptotei sale.

Capitolul 5

CALCULUL DIFERENȚIAL AL FUNCȚIEI DE MAI MULTE VARIABILE REALE

§ 1. Funcții de mai multe variabile. Limită și continuitate

Fie R^n un spațiu n-dimensional euclidian pe mulțimea numerelor reale R. Un element sau un punct al sau îl vom nota $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Numerele reale $x_i\,(i=1,2,...,n)$ se numesc *coordonatele* punctului x. Mulțimea punctelor $x=(0,0,...0,x_i,0,...,0)\in R^n$ formează *axa* Ox_i, iar punctul $x=0=(0,...,0)\in R^n$ se numește *originea* sistemului de coordonate.

Distanța dintre două puncte $x=(x_1,...x_n)$ și $y=(y_1,...y_n)$ din R^n este definită de numărul real $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

Dacă $n=1$, spațiul R^n coincide cu dreapta reală R, dacă $n=2$, R^n coincide cu planul XOY, dacă $n=3$, R^n coincide cu spațiul de trei dimensiuni $OXYZ$.

Vom reaminti pe scurt definițiile de mulțimi: deschisă, mărginită, închisă și compactă.

Se numește *vecinătate* a unui punct $a\in R^n$ orice sferă (bilă) deschisă cu centrul în a, adică mulțimea

$$v(a,\ r)=\{x\,|\,x\in R^n,\ \rho(x,\ a)<r\}.$$

Se spune că $a\in R^n$ este *un punct de acumulare* al mulțimii A din R^n, dacă orice vecinătate $v(a, r)$ a lui conține cel puțin un punct x din A diferit de a.

Punctul $a\in R^n$ se numește *punct interior* al mulțimii $A\subset R^n$, dacă există o vecinătate $v(a, r)$ a lui a ce se conține în A.

O mulțime formată numai din puncte interioare se numește *mulțime deschisă*. Mulțimea $A \subset R^n$ se numește *închisă*, dacă ea conține toate punctele sale de acumulare. O mulțime $A \subset R^n$ este *mărginită*, dacă ea se conține într-o vecinătate a punctului $x = o \in R^n$ de o rază oarecare. O mulțime închisă și mărginită se numește *mulțime compactă* în R^n.

Trecem acum la definiția funcției reale de n variabile reale. Dacă fiecărui punct $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ i se asociază o singură valoare a mărimii $y \in R$, atunci se spune că y este o funcție reală de n variabile reale $x_1, ..., x_n$. Se notează $y = f(x_1, ..., x_n)$ sau $f: R^n \to R$. Mulțimea punctelor $x \in R^n$ pentru care funcția există se numește *domeniu de definiție* (de existență) al acestei funcții. Graficul funcției reale de n variabile reale $y = f(x_1, ..., x_n)$ definită pe mulțimea D din R^n este format din mulțimea punctelor $(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$ din spațiul R^{n+1} când $(x_1, ..., x_n) \in D$.

Dacă $n > 1$, funcția $f: R^n \to R$ se numește *funcție (reală) de mai multe variabile (reale)*. În cazul când $n=2$ [respectiv $n=3$] în loc de funcția $f(x_1, x_2)$ [respectiv $f(x_1, x_2, x_3)$] vom folosi $f(x, y)$ [respectiv $f(x, y, z)$]. Domeniul de definiție al funcției $z=f(x, y)$ reprezintă o mulțime de puncte din R^2 (planul XOY), iar graficul ei – mulțimea punctelor (x, y, z) din R^3 (spațiul de trei dimensiuni $OXYZ$). Domeniul de definiție al funcției $u=f(x, y, z)$ reprezintă o mulțime de puncte (x, y, z) din R^3.

Ne vom opri la definițiile limitei și a continuității funcției reale de două variabile reale. Aceste definiții se generalizează ușor în cazul a trei sau mai multe variabile.

Totalitatea punctelor (x, y) din R^2 ce satisfac inegalitatea $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$, adică interiorul cercului de raza r și centrul (x_0, y_0), se numește *vecinătatea* punctului $M_0(x_0, y_0)$

de raza r şi se notează $v(M_0, r)$. Fie $f: D \to R$ cu $D \subset R^2$ şi $M_0(x_0, y_0)$ un punct de acumulare al mulţimii D (punctul M_0 poate şi să nu aparţină lui D). Vom spune că numărul $a \in R$ se numeşte *limita funcţiei* $z = f(x, y)$ *în punctul* $M_0(x_0, y_0)$, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $r(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice punct $M(x, y) \neq M_0(x_0, y_0)$ din $v(M_0, r(\varepsilon))$ are loc inegalitatea $|f(x, y) - a| < \varepsilon$.

Se scrie $a = \lim\limits_{M \to M_0} f(x, y)$ sau $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Evident că limită funcţiei $f(x, y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ nu depinde de modul după care punctul $M(x, y)$ tinde către punctul $M_0(x_0, y_0)$ (după o direcţie (dreaptă) sau după o curbă oarecare).

Fie $f: D \to R$ cu $D \subset R^2$ şi $M_0(x_0, y_0) \in D$. Funcţia $z = f(x, y)$ se numeşte *continuă* în punctul $M_0(x_0, y_0)$, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $r(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice punct $M(x, y) \in v(M_0, r(\varepsilon))$ are loc inegalitatea $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Dacă funcţia $z = f(x, y)$ este continuă în orice punct al mulţimii D, atunci se spune că $z = f(x, y)$ este *continuă pe* D. Dacă funcţia este continuă pe o mulţime compactă, adică mărginită şi închisă, atunci această funcţie este mărginită şi atinge valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică pe această mulţime compactă.

Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se numeşte *punct de discontinuitate* pentru funcţia $z = f(x, y)$, dacă această funcţie nu este continuă în M_0. Prin urmare, punctul $M_0(x_0, y_0)$ este un punct de discontinuitate, dacă are loc una din următoarele situaţii:

1) funcția $z = f(x, y)$ este definită în toate punctele dintr-o vecinătate oarecare a punctului M_0 doar cu excepția a însuşi punctului M_0;

2) funcția $z = f(x, y)$ este definită în toate punctele din vecinătatea punctului M_0, dar nu există limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;

3) funcția $z = f(x, y)$ este definită în toate punctele din vecinătatea punctului M_0, există limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, însă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze limita funcției:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 1} - 1}$,

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$,

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Rezolvare.

a) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 1} + 1\right) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

b) Trecem de la sistemul cartezian rectangular de coordonate XOY la sistemul polar, polul căruia coincide cu originea, iar axa polară – cu axa OX.

Deci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \rho\to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^2\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right) = 0, \text{ deoarece funcția}$$

$$\varphi(\theta) = \cos^4\theta+\sin^4\theta = \left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta =$$

$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta \le 1 \text{ este mărginită.}$$

Prin urmare, pentru orice $\theta = \theta_0 \in [0, 2\pi]$ această limită este egală cu zero.

c) Să considerăm valorile funcției $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ de-a lungul dreptei $y = kx, k = const.$ Evident că în acest caz $z = \dfrac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{1-k^2}{1+k^2} = const$, adică funcția z de-a lungul oricărei drepte, care trece prin originea sistemului de coordonate XOY, își păstrează valoarea constantă, care depinde de coeficientul unghiular k al dreptei $y=kx$. De aceea, apropiindu-ne de origine pe diferite direcții, vom obține diferite valori limite. Aceasta înseamnă că funcția dată nu are limită în punctul $(0, 0)$.

Notă. Dacă folosim metoda din punctul precedent, obținem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \rho\to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{\rho^2} =$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta.$$

Prin urmare, această limită depinde de direcția $\theta = \theta_0 \in [0, 2\pi]$, ceea ce înseamnă că limita nu există.

d) Observăm că dacă ne apropiem de punctul $(0, 0)$ pe parabola $y = x^2$, atunci:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix} y=x^2 \\ x\to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dacă însă ne apropiem de $(0, 0)$ pe bisectoarea $y=x$, obținem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \left|\begin{matrix} y=x \\ x\to 0 \end{matrix}\right| = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x}{x^4+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x\frac{1}{x^2+1} = 0,$

deoarece funcția $\varphi(x)=\frac{1}{x^2+1}<1$ este mărginită.

Prin urmare, limita dată nu există.

Probleme propuse spre rezolvare

5.1. Să se determine domeniul de definiție al funcției:

a) $z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}$, b) $z=\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$,

c) $z=\frac{4x-3y+2}{x-y}$, d) $z=\ln(y-x)$,

e) $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2x}{2y-x^2-y^2}}$, f) $z=\sqrt{\log_a(x^2+y^2)}$,

g) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-9}$,

h) $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arccos(1-y)$, i) $z=x^2-y^2$,

j) $z=\arcsin(5-x^2-y^2)$,

k) $z=\arccos(3-x^2-y^2)+\arcsin xy$, l) $z=\ln\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$,

m) $z=\sqrt{\ln x+\ln y}$, n) $z=xy\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$,

o) $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$, p) $z=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}$,

r) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$, s) $u=\frac{1}{x^2+y^2-z}$,

t) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$. u) $u=\sqrt{z^2-x^2-y^2}$.

5.2. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-5)^2+1}-1}{x^2+(y-5)^2}$, b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$,

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin \ln\left(x^4+y^2\right)$,

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$, f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$,

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$, h) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(x^3+y^3\right)\cdot \sin \dfrac{1}{\left(x^3+y^3\right)}$,

i) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$, j) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$,

k) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^8-y^8}-1}{x^4+y^4}$, l) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$,

m) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\left(x^3+y^3\right)x^2y^3}{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}$, n) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^4}$,

o) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$. p) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+9}-3}{1-\sqrt{1+xy}}$.

5.3. Să se cerceteze continuitatea funcţiilor:

a) $z=\begin{cases} \dfrac{sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0; \\ 1, x=y=0 \end{cases}$

b) $z=\begin{cases} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0; \\ 1, x=y=0 \end{cases}$

c) $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0.\\ 0, x=y=0\end{cases}$

5.4. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcției:

a) $z=\dfrac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$, b) $z=\dfrac{x^2+2y}{x^2+y^2-4}$,

c) $z=\sin\dfrac{2}{xy}$, d) $u=\dfrac{x+y}{z^2-x^2-y^2}$,

e) $z=\dfrac{x^2+y^2}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$, f) $u=\dfrac{x+z}{xyz}$,

g) $z=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)(y^2-x)}$, h) $u=\dfrac{2z+1}{x^2+y^2-z^2-1}$,

i) $z=\ln(1-x^2-y^2)$, j) $u=\dfrac{y+z}{x^2+y^2-z^2+1}$,

k) $z=\dfrac{x^2+3y^2+1}{(x^2-1)^2-y^4}$, l) $u=\dfrac{x+y+2z}{x^2+2y^2+3z^2-1}$.

§ 2. Derivate parțiale. Diferențiale

Derivată parțială a funcției $z=f(x,y)$ *în raport cu* x în punctul (x_0, y_0) se numește *limita finită*:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Se notează $z'_x(x_0, y_0), f'_x(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$

În mod analog, *derivată parțială a funcției* $y=f(x,y)$ *în raport cu* y în punctul (x_0, y_0) se numește *limita finită*:

$\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ și se notează

$$z'_y(x_0,\ y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Reieşind din definiţie, rezultă că derivata parţială z'_x (respectiv z'_y) înseamnă derivata obişnuită în raport cu x (respectiv în raport cu y), calculată în ipoteza că y (respectiv x) este constant. Deci regulile de calcul ale derivatelor parţiale coincid cu regulile de derivare ale funcţiilor de o singură variabilă.

Derivatele parţiale ale funcţiei de mai multe variabile se definesc în mod analog.

Fie $z = f(x_1,...,x_n)$, atunci

$$z'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1,...,x_i+\Delta x_i, x_{i+1},...,x_n) - f(x_1,...,x_i,x_{i+1},...,x_n)}{\Delta x_i},$$

$(i = 1,2,...,n)$.

Dacă $z = f(x,y)$, atunci expresia $dz = z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y$ se numeşte *diferenţiala totală* a funcţiei date în punctul dat.

Funcţia $z = f(x,y)$, se numeşte *diferenţiabilă* în punctul dat $M_0(x_0,y_0)$, dacă creşterea ei totală

$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = z'_x(x_0,y_0)\Delta x + z'_y(x_0,y_0)\Delta y +$
$+\alpha(\Delta x,\Delta y)$, unde $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x,\Delta y) = 0$.

Creşterile variabilelor independente Δx şi Δy le vom numi *diferenţiale ale argumentelor* x şi y şi le vom nota respectiv dx şi dy. Prin urmare, diferenţiala totală în punctul $M_0(x_0,y_0)$ se va calcula după formula

$$dz(x_0,y_0) = z'_x(x_0,y_0)dx + z'_y(x_0,y_0)dy.$$

Dacă $z = f(x,y)$ este diferenţiabilă în punctul $M_0(x_0,y_0)$, atunci $\Delta z \approx dz$, de unde obţinem formula principală a calculului aproximativ:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Presupunem că în funcția $z = f(u,v)$ argumentele u și v sunt funcții de variabile independente x și y, adică $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$. Atunci z este o funcție compusă în raport cu x și cu y și derivatele ei parțiale se calculează după formulele: $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$ și $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_z$.

Pentru cazul când avem mai multe variabile, aceste formule în mod natural se generalizează. De exemplu, dacă $z = f(u,v,w)$ și $u = \varphi_1(x,y)$, $v = \varphi_2(x,y)$, $w = \varphi_3(x,y)$, atunci

$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x + z'_w w'_x$ și $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y + z'_w w'_y$.

Dacă avem funcția compusă $z = f(x,y,u,v)$ cu $y = \varphi_1(x)$, $u = \varphi_2(x)$, $v = \varphi_3(x)$, atunci z este o funcție compusă de o singură variabilă x și derivata ei $\frac{dz}{dx}$ se numește *derivată totală*. Ea se calculează după formula:

$$\frac{dz}{dx} = z'_x + z'_y y'_x + z'_u u'_x + z'_v v'_x.$$

Considerăm funcția $y = f(x)$ definită implicit cu ajutorul ecuației $F(x,y) = 0$ și $F'_y(x,y) \neq 0$. Atunci

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Dacă funcția $z = f(x,y)$ este definită implicit prin ecuația $F(x,y,z) = 0$ și $F'_z(x,y,z) \neq 0$, atunci derivatele ei parțiale se calculează după formulele:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Fie $z = f(x,y)$. Derivatele ei parțiale sunt funcții de variabilele x și y. Derivându-le în raport cu x și cu y, obținem derivate parțiale de ordinul doi față de funcția inițială. Derivatele parțiale de ordinul *2* sunt la număr $2^2=4$ și se notează astfel:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\quad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Derivatele parțiale de la derivatele parțiale de ordinul *2* ale funcției $z=f(x,y)$ se numesc *derivate parțiale de ordinul trei* ale funcției *z* și sunt la număr $2^3=8$. În general, derivata parțială de ordinul *n* se numește *derivata obișnuită de la derivata parțială de ordinul (n-1).*

Pentru funcțiile de *3, 4,* ... variabile derivatele parțiale de ordin superior se definesc în mod analog.

Derivatele parțiale de ordin superior în raport cu diferite variabile independente se numesc *derivate parțiale mixte.* Dacă $z=f(x,y)$ și derivatele ei parțiale până la ordinul *n* sunt continue, atunci derivatele parțiale mixte nu depind de ordinea derivării față de *x* și *y*, adică $z''_{xy}=z''_{yx}$, $z'''_{x^2y}=z'''_{yx^2}=z'''_{xyx}$ etc.

Diferențiala totală depinde de punctul dat, adică este o funcție de *x* și *y*. Diferențiala totală a acestei funcții se numește *diferențială de ordinul doi a funcției inițiale.* Se notează d^2z și este egală cu $d^2z=d(dz)=z''_{xx}dx^2+$ $+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2$. Diferențiala de ordinul *3* se notează d^3z și este egală cu

$$d^3z=d\left(d^2z\right)=z'''_{x^3}+3z'''_{x^2y}dx^2dy+3z'''_{xy^2}dxdy^2+z'''_{y^3}dy^3 \text{ etc.}$$

(în formulele de mai sus se consideră că *z* și derivatele ei parțiale până la ordinul $n=2$ (respectiv $n=3$) sunt continue).

Fie $u=f(x,y,z)$. Vectorul $\overrightarrow{gradu}=u'_x\vec{i}+u'_y\vec{j}+u'_z\vec{k}$ se numește *gradientul funcției date în punctul dat.* Derivata funcției *u* în punctul dat $M_0(x_0,y_0,z_0)$ în direcția vectorului $\vec{s}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ se calculează după formula:

$$u'_{\vec{s}}(M_0)=u'_x(M_0)\cos\alpha+u'_y(M_0)\cos\beta+u'_z(M_0)\cos\gamma,$$

unde

$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, $\cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Formula Taylor de ordinul n pentru funcția $z = f(x,y)$ în punctul (x_0, y_0) are forma:

$$f(x,y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + R_n(\Delta x, \Delta y), \text{ unde}$$

$$df(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y,$$

$$d^2 f(x_0,y_0) = d\left(d\left(f(x_0,y_0)\right)\right) =$$

$$= f_{xx}''(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}''(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}''(x_0,y_0)\Delta y^2,$$

$$d^3 f(x_0,y_0) = d\left(d^2 f(x_0,y_0)\right) \text{ etc.},$$

$d^n f(x_0,y_0) = d\left(d^{n-1} f(x_0,y_0)\right)$ și $R_n(\Delta x, \Delta y)$ este restul de ordinul n al funcției date.

Formula Taylor în punctul $(0, 0)$ se numește *formula Mac Laurin.*

Ecuația planului tangent la suprafața $z = f(x,y)$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ cu $z_0 = f(x_0, y_0)$ are forma

$$z - z_0 = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0),$$

iar ecuația normalei este: $\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.

Dacă suprafața este determinată prin ecuația $F(x,y,z) = 0$, atunci ecuația planului tangent la această suprafață în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ cu $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ are forma $F_x'(M_0)(x-x_0) + F_y'(M_0)(y-y_0) + F_z'(M_0)(z-z_0) = 0$, iar ecuația normalei este: $\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y-y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}$.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze derivata totală a funcției compuse:

$z = u^v$, $u = \ln x$, $v = \sin x$.

Rezolvare. După regulile de derivare ale funcției compuse avem $\frac{dz}{dx} = z'_u u'_x + z'_v v'_x = vu^{v-1}\frac{1}{x} + u^v (\ln u)\cos x =$

$$= u^v\left[\frac{uv}{x} + (\ln u)\cos x\right] = (\ln x)^{\sin x}\left[\frac{1}{x}(\ln x)\sin x + \left(\ln(\ln x)\right)\cos x\right].$$

2. Să se calculeze derivatele parțiale z'_x, z'_y ale funcției implicite $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$ în punctul $M_0(1,1,1)$.

Rezolvare. Avem $F(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4.$

Calculăm derivatele ei parțiale în $M_0(1, 1, 1)$:

$F'_x(x,y,z) = 8x + y + 1$, deci $F'_x(M_0) = 8 + 1 + 1 = 10$;

$F'_y(x,y,z) = 4y + x - z$, deci $F'_y(M_0) = 4 + 1 - 1 = 4$;

$F'_z(x,y,z) = -6z - y$, deci $F'_z(M_0) = -6 - 1 = -7$.

Prin urmare, după formulele $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ și $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$

obținem $z'_x(1,1) = -\frac{10}{-7} = \frac{10}{7}$ și $z'_y(1,1) = \frac{4}{7}$.

3. Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului $1{,}04^{2{,}02}$.

Rezolvare. Considerăm funcția $z=x^y$ și alegem $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = 0{,}02$. Calculăm diferențiala totală a funcției z în punctul $M_0(x_0, y_0)$:

$$dz(1,2) = z'_x(1,2)\cdot\Delta x + z'_y(1,2)\cdot\Delta y = \left(y\cdot x^{y-1}\right)_{M_0}\cdot\Delta x + \left(x^y \ln x\right)_{M_0}\cdot\Delta y =$$

$$= 2\cdot 0{,}04 + 0\cdot 0{,}02 = 0{,}08.$$

Prin urmare, după formula:

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$ avem:

$1{,}04^{2{,}02} \approx 1 + 0{,}08 = 1{,}08.$

4. Să se scrie ecuația planului tangent și ecuația normalei la elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Rezolvare. Considerăm funcția $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$ și calculăm derivatele ei parțiale în M_0:

$$F_x'(M_0)=\frac{2x_0}{a^2}, F_y'(M_0)=\frac{2y_0}{b^2}, F_z'(M_0)=\frac{2z_0}{c^2}.$$

Prin urmare, ecuația planului tangent are forma:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0y}{b_0}-\frac{y_0^2}{b_2}+\frac{z_0z}{c^2}-\frac{z_0^2}{c_2}=0,$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0.$$

Întrucât M_0 aparține elipsoidului, avem

$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ și ecuația planului tangent este:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

Ecuația normalei are forma: $\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$.

5. Să se arate că funcția $f(x,y,z)=\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)$ verifică ecuația $xzf_x'(x,y,z)-yzf_y'(x,y,z)+(x^2-y^2)f_z'(x,y,z)=0$.

Rezolvare. Pentru a calcula derivatele parțiale ale funcției $f(x,y,z)$ introducem $u=xy$, $v=x^2+y^2-z^2$ și folosim regula de derivare a funcției compuse. Astfel, $f(x,y,z)=\varphi(u,v)$ și

$f_x'(x,y,z)=\varphi_u'(u,v)\cdot u_x'+\varphi_v'(u,v)\cdot v_x'=\varphi_u'(u,v)\cdot y+\varphi_v'(u,v)\cdot 2x;$

$f_y'(x,y,z)=\varphi_u'(u,v)\cdot u_y'+\varphi_v'(u,v)\cdot v_y'=\varphi_u'(u,v)\cdot x+\varphi_v'(u,v)\cdot 2y;$

$f_z'(x,y,z)=\varphi_u'(u,v)\cdot u_z'+\varphi_v'(u,v)\cdot v_z'=o+\varphi_v'(u,v)\cdot(-2z)=$

$= -2z\varphi' v(u,v)$.

Prin urmare,

$$xz \cdot f_x'(x,y,z) - yz \cdot f_y'(x,y,z) + (x^2 - y^2) \cdot f_z'(x,y,z) =$$

$$= xyz \cdot \varphi_u'(u,v) + 2x^2 z \cdot \varphi_v'(u,v) - xyz \cdot \varphi_u'(u,v) -$$

$$- 2y^2 z \cdot \varphi_v'(u,v) - 2x^2 z \cdot \varphi_v'(u,v) + 2y^2 z \cdot \varphi_v'(u,v) = 0.$$

6. Să se scrie formula Mac Laurin de ordinul *4* pentru funcţia $z=\sin x \cdot \mathrm{sh} y$ în punctul $(0,0)$.

Rezolvare. Avem

$$z = f(0,0) + df(0,0) + \frac{1}{2!} d^2 f(0,0) + \frac{1}{3!} d^3 f(0,0) +$$

$$+ \frac{1}{4!} d^4 f(0,0) + R_4(\Delta x, \Delta y).$$

Observăm că $f(0,0)=0$.

Calculăm diferenţialele totale ale funcţiei z până la ordinul *4*: $dz = z_x' dx + z_y' dy = \cos x \, \mathrm{sh} y \, dx + \sin x \, \mathrm{ch} y \, dy$,

$$d^2 z = d(dz) = z_{xx}'' dx^2 + 2z_{xy}'' dx\,dy + z_{yy}'' dy^2 = (-\sin x \, shy) dx^2 +$$

$$+ 2\cos x \, chy \, dx\,dy + \sin x shy \, dy^2,$$

$$d^3 z = d(d^2 z) = z\,dx^3 + 3z_{xxy}''' dx^2 dy + 3z_{xyy}''' dx dy^2 + z_{y^3}''' dy^3 =$$

$$= (-\cos x shy) dx^3 + 3(-\sin x \, chy) dx^2 dy + 3\cos x \, shy \, dx\,dy^2 +$$

$$+ \sin x \, chy \, dy^3;$$

$$d^4 z = d(d^3 z) = z_{x^4}^{IV} dx^4 + 4z_{x^3 y}^{IV} dx^3 dy + 6z_{x^2 y^2}^{IV} dx^2 dy^2 +$$

$$+ 4z_{xy^3}^{IV} dx\,dy^3 + z_{y^4}^{IV} dy^4 = sin x \, shy \, dx^4 - 4 cos x \, chy \, dx^3 dy -$$

$$- 6 sin x \, shy \, dx^2 dy^2 + 4 cos x \, chy \, dx\,dy^3 + sin x \, shy \, dy^4.$$

Considerând $x=z=0$, avem $dx=\Delta x=x$, $dy=\Delta y=y$ şi $df(0,0)=0$, $d^2 f(0,0)=2dxdy=2xy$, $d^3 f(0,0)=0$, $d^4 f(0,0)=-4dx^3 dy+4dxdy^3=-4x^3 y+4xy^3 = 4xy(y^2-x^2)$.

Prin urmare,

$$z = \sin x \, shy = \frac{1}{2!} \cdot 2xy + \frac{1}{4!} 4xy(y^2 - x^2) + R_4(x,y) = xy +$$

$$+\frac{xy}{6}\left(y^2-x^2\right)+R_4(x,y),$$

unde $R_4(x,\ y)=\frac{1}{5!}d^5z(\theta x,\ \theta y),\quad 0<\theta<1.$

Probleme propuse spre rezolvare

5.5. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcțiilor:

a) $z=x^2+2y^2+3x^2y+4x+5y+1$, b) $z=x^2\sin^4 y$,

c) $z=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+tg2x+\cos^2 y$, d) $z=arctg\frac{y}{1+x^2}$,

e) $z=e^{(x^2+y^2)^2}$, f) $u=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$,

g) $u=e^{\frac{x}{y}}+e^{-\frac{z}{y}}$, h) $u=e^{xyz}\sin\frac{y}{x}$,

i) $u=\sin(3x+5y-4z)$, j) $z=x^{\sin y}$,

k) $z=e^{arctg\frac{y}{x}}$, l) $z=ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,

m) $z=arctg\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$, n) $u=(\sin x)^{yz}$.

5.6. Să se determine diferențiala totală a funcțiilor:

a) $z=\ln(xy)$, b) $z=arctg\frac{x}{y}$,

c) $u=tg(3x-y)+6^{y+z}$, d) $z=\ln tg\left(\frac{y}{x}\right)$,

e) $z=e^{x+y}(x\cos y+y\sin x)$, f) $z=arctg\frac{2(x+\sin y)}{4-x\sin y}$,

g) $u=e^{xyz}$, h) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$,

i) $z=arctg(xy)+e^{x+y}$, j) $u=xy+yz+xz$.

5.7. Să se calculeze z'_x, z'_y dacă:

a) $z = u^2 \ln v, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = x^2 + y^2;$

b) $z = u^2 v - uv^2, \quad u = x \sin y, \quad v = y \cos x;$

c) $z = f(u,v), \quad u = \frac{2y}{x+y}, \quad v = x^2 - 3y;$

d) $z = f(u,v), \quad u = \ln(x^2 - y^2), \quad v = xy^2;$

e) $z = \ln(u^2 + v^2), \quad u = xy, \quad v = \frac{x}{y};$

f) $z = e^{u-2v}, \quad u = \sin x, \quad v = x^3 + y^2.$

5.8. Să calculeze derivata totală a funcției compuse:

a) $z = \sin u \cdot \cos v, \quad u = \ln(1 + x^2), \quad v = -\sqrt{1 - x^2};$

b) $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, \quad y = 3x + 1;$

c) $z = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{v}, \quad u = tg^2 x, \quad v = ctg^4 x;$

d) $z = arctg \frac{v}{u}, \quad u = e^{2x} + 1, \quad v = e^{2x} - 1;$

e) $z = \ln(e^x + e^y), \quad y = \frac{1}{3}x^3 + x;$

f) $z = \arcsin(u + v), \quad u = \cos\alpha \cdot \sin x, \quad v = \sin\alpha \cdot \cos x;$

g) $z = ln(x - y^4), \quad y = \sqrt{\sin x};$

h) $z = \frac{e^{ax}(u - v)}{a^2 + 1}, \quad u = a \sin x, \quad v = \cos x;$

i) $z = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}, \quad u = -\cos x, \quad v = \cos x;$

j) $z = arctg \frac{x+y}{1-xy}, \quad y = \cos x.$

5.9. Să se afle derivatele y'_x, z'_x, z'_y ale funcțiilor implicite

definite prin ecuaţiile:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b) $y^x = x^y$,

c) $sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$, d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-arctg\frac{y}{x}=0$,

e) $3\sin\frac{\sqrt{x}}{y}-2\cos\frac{\sqrt{x}}{y}+1=0$, f) $\ln tg\frac{y}{x}-\frac{y}{x}=3$,

g) $x-ytg2z=0$, h) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$,

i) $x=z\ln\frac{z}{y}$, j) $x\sin y+y\sin x+z\sin x=2$,

k) $z=x+arctg\frac{y}{z-x}$, l) $xe^y+ye^x+ze^x=10$.

5.10. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru:

a) $\sqrt[3]{1,02^2+0,05^2}$, b) $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$,

c) $\sin 28°\cdot\cos 61°$, d) $arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$,

e) $\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02}$, f) $\ln(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1)$,

g) $1,002\cdot 2,003^2\cdot 3,004^3$, h) $1,04^{2,02}$.

5.11. Să se calculeze derivatele parţiale şi diferenţiala totală de ordin superior:

a) z''_{xx}, dacă $z=xy+\sin(x+y)$,

b) z''_{xy}, dacă $y=arctg\frac{x+y}{1-xy}$,

c) z''_{xy}, dacă $z=x^2\ln(x+y)$,

d) z''_{xy}, dacă $z=e^{xy}$, e) u'''_{xyz}, dacă $u=\sin(xyz)$,

f) d^2z, dacă $z=x^2y^2$, g) d^2z, dacă $z=\cos(x+2y^2)$,

h) d^2z, dacă $z=y\,lnx$, i) d^2z, dacă $z=e^{ax+by}$,

j) d^2z, dacă $z=e^x\,lny+(\sin y)lnx$,

k) d^2y, dacă $z=(x^2+y^2)^2$, l) d^2z, dacă $z=e^{x-y^2}+\cos x$.

5.12. Să se demonstreze că funcția

a) $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $yz'_y + xz'_x = xy + z$,

b) $z = arctg\frac{y}{x}$ verifică ecuația $xz'_x + yz'_y = 0$,

c) $z = x + y + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuația $xz'_x + zy'_z = x + y$,

d) $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ verifică ecuația $z'_x + z'_y = x + y$,

e) $z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ verifică ecuația $z''_{tt} = a^2 z''_{xx}$,

f) $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ verifică ecuația $xz''_{xx} + yz''_{xy} = 2z'_x$,

g) $z = f(x) \cdot g(y)$ verifică ecuația $zz''_{xy} = z'_x z'_y$,

h) $z = f(x) + yf'(x)$ verifică ecuația $z'_x = z'_y + yz''_{xy}$,

i) $z = \ln(e^x + e^y)$ verifică ecuația $z''_{xx} z''_{yy} = (z''_{xy})^2$,

j) $z = e^x(x\cos y - y\sin y)$ verifică ecuația $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$,

k) $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$ verifică ecuația $z''_{xx} = a^2 z''_{yy}$,

l) $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ verifică ecuația $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$,

m) $z = \ln(x + e^{-y})$ verifică ecuația $z'_x z''_{xy} = z'_y z''_{xx}$.

5.13. Să se alcătuiască ecuația planului tangent și ecuația normalei la suprafața dată în punctul dat:

a) $z = 2x^2 + y^2$, $M_0(1,1,3)$;

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1,0,0)$;

c) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $M_0(1,1,1)$;

d) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, $M_0(0,2,0)$;

e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$, $M_0(2,3,5)$;

f) $z = \sin x \cos y, \quad M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$;

g) $x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad M_0(2,2,3)$;

h) $z = x^4 + 2x^2 y - xy + x, \quad M_0(1,0,2)$;

i) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0, \quad M_0(1,2,3)$.

5.14. Să se demonstreze că:

a) suma segmentelor tăiate pe axele de coordonate de planul tangent la suprafața $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, $a>0$, în punctul dat este egală cu mărimea constantă a;

b) sumă pătratelor segmentelor tăiate pe axele de coordonate de planul tangent la suprafața $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{a^2}$ în punctul dat este egală cu a^2, $a \neq 0$.

5.15. Să se determine punctul $M_0(x_0, z_0, z_0)$ de pe suprafața $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ astfel încât planul tangent la suprafața dată în punctul M_0 să fie paralel cu planul $x+y+z=1$.

5.16. Să se afle punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ astfel încât:

a) normala la suprafața dată în punctul M_0 formează cu axele de coordonate unghiuri egale;

b) planul tangent la suprafața dată în punctul M_0 taie pe axele de coordonate segmente egale.

5.17. Să se afle derivata funcției $y = 3x^4 - xy + y$ în punctul $M_0(1, 2)$ în direcția ce formează cu axa OX unghiul de 60°.

5.18. Să se calculeze derivata funcției $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ în punctul $M(2, 1)$ în direcția vectorului $\vec{MN}$, dacă $N(5, 5)$.

5.19. Să se arate că derivata funcției $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ în punctul $M_0\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ în orice direcție este egală cu zero.

5.20. Să se afle derivata funcției $z = \ln(e^x + e^y)$ într-un punct arbitrar în direcția bisectoarei cadranelor 1 și 3.

5.21. Să se afle derivata funcției $u = xy^2y^3$ în punctul $M(3,2,1)$ în direcția vectorului $\vec{MN}$, dacă $N(5, 4, 2)$.

5.22. Să se afle derivata funcției $u = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctgz$ în punctul $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ în direcția gradientului ei în acest punct.

5.23. Să se calculeze derivata funcției $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + y^2}}$ într-un punct arbitrar în direcția gradientului ei.

5.24. Să se calculeze unghiul dintre gradienții funcției $z = \ln\frac{y}{x}$ în punctele $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ și $M_2(1,1)$.

5.25. Să se determine derivata funcției $z = arctg\frac{y}{x}$ în punctul $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ce aparține circumferinței $x^2 + y^2 - 2x = 0$ după direcția tangentei la circumferință în M_0.

5.26. Fie $u = f(x, y, z)$. Să se arate că $u'_x = u'_{\vec{i}}, u'_y = u'_{\vec{j}}, u'_z = u'_{\vec{k}}$, unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt vectorii unitari ai axelor *OX, OY, OZ*.

5.27. Să se scrie formula Taylor de ordinul *n* pentru funcția:

a) $z = e^{x+y}$ în punctul *(0, 0)*,

b) $z = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ în punctul *(-2, 1)*,

c) $z = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 2y - 4$ în punctul *(1, -2)*,

d) $z = x^3 - 2y^3 + 3xy$ în punctul *(2, 1)*.

5.28. Să se scrie formula Mac Laurin de ordinul 3 pentru funcția $z = e^x \sin y$.

5.29. Să se scrie formula Mac Laurin de ordinul 4 pentru funcția $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

5.30. Să se scrie formula Taylor de ordinul 3 pentru funcția x^y în punctul *(1, 1)*.

5.31. Să se scrie formula Taylor de ordinul 3 pentru funcția $\frac{y}{x}$ în punctul *(1, 1)*.

5.32. Să se scrie formula Taylor de ordinul 2 pentru funcția $z = f(x,y)$, definită implicit prin ecuația $z^3 + 3yz - 4x = 0$ în punctul *(1, 1)*, dacă $f(1,1) = 1$.

§3. Extremele funcției de mai multe variabile

Fie funcția $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ și $x^0(a_1, a_2, ..., a_n)$ un punct interior din domeniul ei de definiție. Punctul x^0 se numește *punct de minim* al funcției z dacă există o vecinătate $v(x^0, r)$ a lui astfel încât $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f(a_1, a_2, ...a_n)$ pentru orice punct $(x_1, x_2, ..., x_n)$ din $v(x^0, r)$. Punctul x^0 se numește *punct de maxim* pentru z, dacă există o vecinătate $v(x^0, r)$ a lui astfel încât $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(a_1, a_2, ..., a_n)$ pentru orice punct $(x_1, x_2, ...x_n)$ din $v(x^0, r)$.

Punctele de maxim și minim astfel definite sunt puncte de maxim și minim *locale* sau *relative*. Ele se mai numesc puncte de *extreme locale* sau *relative*.

Condiția necesară de existență a extremelor: dacă funcția $f(x_1, ..., x_n)$ are în $x^0(a_1, a_2, ...a_n)$ un extrem și funcția z are derivate parțiale finite în x^0, atunci $f'_{x_i}(a_1, ..., a_n) = 0$ pentru $i = 1, 2, ..., n$.

Condiția suficientă de existență a extremelor: dacă funcția are derivate parțiale continue până la ordinul 2 inclusiv într-

o vecinătate a punctului staţionar $x^0(a_1,a_2,...,a_n)$, adică $f'_{x_i}(a_1,...,a_n)=0$, pentru $i=1,2,...,n$, atunci:

1) punctul x^0 este punct de minim pentru z, dacă $d^2z(a_1,...,a_n)$ este pozitiv definită (ca formă pătratică faţă de creşterile argumentelor);

2) punctul x^0 este punct de maxim pentru z, dacă $d^2z(a_1,...,a_n)$ este negativ definită (ca formă pătratică faţă de $dx_1,dx_2,...,dx_n$);

3) dacă $d^2z(a_1,...,a_n)$ primeşte atît valori pozitive, cât şi valori negative pentru valorile lui dx_i $(i=1, ..., n)$, atunci punctul x^0 nu este punct extrem pentru z;

4) dacă $d^2z(a_1,...,a_n)=0$ pentru orice valori $dx_i(i=1,...,n)$, atunci cercetarea extremelor funcţiei z cere un studiu mai amplu asupra diferenţialelor totale de ordinul $n>2$.

Paralel cu condiţiile astea, în practică se foloseşte des şi criteriul Sylvester: notăm $A_{ij}=f''_{x_ix_j}(a_1,...,a_n)$, $i,j=1,2,...,n$ şi

$$\Delta_1=A_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{vmatrix},\Delta_3=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix},...,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}A_{11}&...&A_{1n}\\A_{21}&&A_{2n}\\...&&...\\A_{n1}&...&A_{nn}\end{vmatrix},\text{ atunci:}$$

a) condiţia suficientă ca punctul staţionar $x^0(a_1,...,a_n)$ să fie punct de minim pentru $z=f(x_1,...,x_n)$ este

$$\Delta_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0,...,\Delta_n>0;$$

b) condiţia suficientă ca punctul staţionar x^0 să fie punct de maxim pentru z este

$\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3<0,\Delta_4>0,...,(-1)^n\Delta_n>0$ (a se consulta [3], [15]).

În cazul funcției $z = f(x, y)$ de două variabile presupusă a avea derivatele parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctului staționar (x_0, y_0), adică $z'_y(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0$ avem:

a) punctul (x_0, y_0) este punct de minim pentru z, dacă

$A_{11} = z''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ și

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = z''_{xx}(x_0, y_0) \cdot z''_{yy}(x_0, y_0) - (z''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0;$$

b) punctul (x_0, y_0) este punct de maxim pentru z, dacă $A_{11} = z''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ și

$\Delta_2 = z''_{xx}(x_0, y_0) \cdot z''_{yy}(x_0, y_0) - (z''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$

c) dacă $\Delta_2 < 0$, atunci punctul (x_0, y_0) nu este punct de extrem pentru z (a se consulta [1], [2], [3]).

Dacă se cere să se determine extremele funcției $f(x_1, \ldots x_n)$ în care variabilele $x_1, \ldots, x_n$ sunt supuse unor legături de forma $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots$, $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(k<n)$, se construiește funcția Lagrange

$L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots$

$\ldots + \lambda_k\varphi_k(x_1, \ldots, x_n),$

unde numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ se numesc multiplicatorii Lagrange.

Se formează apoi sistemul de $(k+n)$ ecuații:

$dL(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ cu $(k+n)$ necunoscute $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Rezolvând sistemul de ecuații, aflăm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$. Problema referitoare la faptul dacă pentru valorile aflate funcția are maxim sau minim sau nu are nici unul, nici altul, în cazul general rămîne nerezolvată. Această problemă se poate rezolva pe baza considerentelor auxiliare ([11], [15] v. 2, §43).

Dacă funcţia $z=f(x, y)$ este continuă într-un domeniu închis şi mărginit D, atunci conform teoremei Weierstrass, ea atinge valoarea cea mai mare $Sup_D f(x,y)$ şi valoarea cea mai mică $Inf_D f(x,y)$. Pentru a determina aceste valori folosim următoarea schemă (a se consulta [6], [7], [15]):

1) aflăm valorile funcţiei $z=f(x,y)$ în punctele ei staţionare ce aparţin domeniului D ;

2) aflăm valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică a funcţiei $z=f(x, y)$ pe frontiera domeniului D (extreme condiţionate);

3) cea mai mare valoare din punctele precedente coincide cu $Sup_D z$, iar cea mai mică valoare din 1) şi 2) coincide cu $Inf_D z$.

Probleme rezolvate

1. Să se studieze extremele funcţiei:

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$,

b) $u = \sum_{i=1}^{k}\left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + (z-c_i)^2\right], k \in N.$

Rezolvare.

a) Determinăm mai întâi punctele staţionare ale funcţiei z, coordonatele cărora sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} z_x' = 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y' = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Obţinem punctele $M_1(0, 0)$ şi $M_2(1, 1)$.

Calculăm derivatele de ordinul doi:

$z_{xx}'' = 6x, \quad z_{xy}'' = -3, \quad z_{yy}'' = 6y.$

Considerăm 2 cazuri:

$1°)\ A_{11} = z_{xx}''(M_1) = 0, \quad A_{12} = z_{xy}''(M_1) = -3$ şi

$A_{22} = z_{yy}''(M_1) = 0.$

Prin urmare, $\Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0 - 9 = -9 < 0$. Deci punctul $M_1(0, 0)$ nu este punct de extrem.

$2^\circ)\ A_{11} = z''_{xx}(M_2) = 6, \quad A_{12} = z''_{xy}(M_2) = -3$ şi

$A_{22} = z''_{yy}(M_2) = 6.$

Prin urmare, $\Delta_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ şi $A_{11} > 0.$

Deci punctul $M_2(1, 1)$ este punct de minim cu

$z_{\min} = f(M_2) = 1 + 1 - 3 = -1.$

b) Avem $u'_x = 2\sum_{i=1}^{k}(x - a_i),\ u'_y = 2\sum_{i=1}^{k}(y - b_i),\ u'_z = 2\sum_{i=1}^{k}(z - c_i).$

Obţinem un punct staţionar cu coordonatele:

$$x_0 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}, \quad y_0 = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}, \quad z_0 = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_k}{k}.$$

Calculăm derivatele de ordinul doi în punctul respectiv:

$u''_{xx} = u''_{yy} = u''_{zz} = 2k, \quad u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yz} = 0.$ Deci

$$\Delta_1 = A_{11} = u''_{xx} = 2k > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{vmatrix} = 4k^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{vmatrix} = 8k^3 > 0.$$

Prin urmare, funcţia u are în punctul $M_0(x_0, y_0, y_0)$ un minim şi $u_{\min} = f(x_0, y_0, z_0) = 0.$

2. Să se calculeze extremele condiţionate ale funcţiei:

a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ cu condiţia $x+y=2;$

b) $u=x^3+y^3+z^3$ cu condiţia $z^2+y^2+z^2=3, \quad x>0, \quad y>0, \quad z>0.$

Rezolvare.

a) Funcţia Lagrange are forma

$L(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(x + y - 2)$ şi

$$dL(x, y) = L'_x(x, y)dx + L'_y(x, y)dy = \left(-\frac{1}{x^2} + \lambda\right)dx + \left(-\frac{1}{y^2} + \lambda\right)dy.$$

Formăm sistemul din 3 ecuaţii cu trei necunoscute:

$dL(x,y)=0$, $x+y-2=0$, adică $\lambda-\frac{1}{x^2}=0$, $\lambda-\frac{1}{y^2}=0$, $x+y-2=0$.

Rezolvând sistemul, obţinem:

$\lambda=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}$, $x+y-2=0$ sau $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(2-x)^2}$, de unde $x_1=1$.

Deci $\lambda_1=1$ şi $y_1=1$.

Deoarece $d^2L(x,y)=L''_{xx}\,dx^2+2L''_{xy}\,dx\,dy+L''_{yy}\,dy^2=$

$=\frac{2}{x^3}dx^2+0+\frac{2}{y^3}dy^2$, rezultă că $d^2L(1,1)=2dx^2+2dy^2=$

$=2(dx^2+dy^2)>0$ pentru orice dx şi dy. Aceasta înseamnă că $d^2L(1,1)$ este pozitiv definită. Punctul $(1, 1)$ este un punct de minim condiţionat pentru funcţia z şi $z_{\min}=f(1,1)=2$. (vezi, de exemplu, [15], v. 2, §43.5, teorema 3). Bineînţeles, punctul $(1, 1)$ satisface ecuaţia de legătură.

Exemplul dat poate fi rezolvat şi direct: din ecuaţia de legătură aflăm $y=2-x$ şi înlocuim în funcţia z. Obţinem $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{2-x+x}{x(2-x)}=\frac{2}{2x-x^2}$ o funcţie de o singură variabilă reală. Aflăm extremele acestei funcţii după schema obişnuită: $z'_x=-\frac{2(2-2x)}{(2x-x^2)^2}=\frac{4(x-1)}{x^2(2-x)^2}$.

Funcţia dată are un singur punct staţionar $x_1=1$. Trecând prin punctul $x_1=1$ de la stânga la dreapta, derivata z'_x îşi schimbă semnul de la minus la plus. Prin urmare, punctul $(x_1=1,\ y_1=1)$ este un punct de minim cu $z_{min}=z(1)=2$. Pentru $x=2$, avem $z(2)=\infty$.

b) Formăm funcţia Lagrange

$L(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$.

Deci $dL = L'_x dx + L'_y dy + L'_z dz = (3x^2 + 2x\lambda)dx +$

$+(3y^2 + 2y\lambda)dy + (3z^2 + 2\lambda z)dz$.

Sistemul de ecuații are forma:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x\lambda = 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ 3z^2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de ecuații și luând în considerare că $x>0$, $y>0$, $z>0$, obținem: $\lambda = -\frac{3}{2}$, $x_1 = y_1 = z_1 = 1$.

Calculăm $d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy +$

$+ 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz$.

Observăm că

$L''_{xx} = 6x + 2\lambda$, $L''_{yy} = 6y + 2\lambda$, $L''_{zz} = 6z + 2\lambda$

și $L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0$. Deci

$d^2L(1, 1, 1) = (6 - 3)dx^2 + (6 - 3)dy^2 + (6 - 3)dz^2 =$

$= 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$.

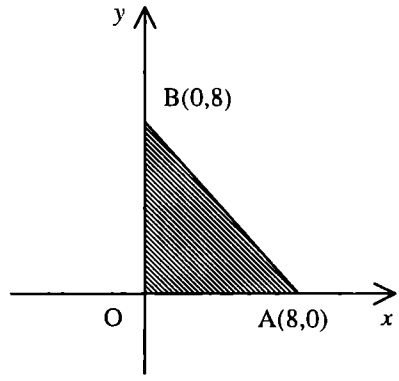
Aceasta înseamnă că $d^2L(1, 1, 1)$ este pozitiv definită pentru orice dx, dy, dz. Punctul $M_0(1, 1, 1)$ este un punct de minim pentru funcția u și $u_{min}=f(1, 1, 1)=3$ (vezi [15], v. 2, §43.5, teorema 3).

Evident că punctul $(1, 1, 1)$ satisface ecuația de legătură.

3. Să se afle valoarea cea mai mare și valoarea cea mai mică a funcției $z=x^3+3y^2-6xy-9x+30$ pe domeniul D închis și mărginit de dreptele $x=0$, $y=0$ și $x+y=8$.

Rezolvare.

Domeniul D reprezintă figura mărginită de ΔOAB:



1') Aflăm punctele staționare:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 6y - 9 = 0 \\ z'_y = 6y - 6x = 0 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem două puncte $M_1(3, 3) \in D$ și $M_2(-1, -1) \notin D$. Deci $z(M_1)=3$.

2') Aflăm valoarea cea mai mare și valoarea cea mai mică a funcției z pe conturul ΔOAB.

a) Pe porțiunea OA avem $y=0$, $x \in [0, 8]$. Deci $z=x^3-9x+30$, $x \in [0, 8]$. Aplicăm la această funcție schema aflării valorilor cea mai mare și cea mai mică pentru funcțiile de o singură variabilă reală (vezi ultimul alineat din §5, cap. 2):

$z'_x = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3} \in [0, 8]$ și $x_2 = -\sqrt{3} \notin [0, 8]$.

Deci $z(\sqrt{3}, 0) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 30 = 30 - 6\sqrt{3}$,

$z(0, 0) = z(0) = 30$,

$z(8, 0) = z(A) = 8^3 - 9 \cdot 8 + 30 = 470$.

Prin urmare, $Sup_{OA} z = 470$ și $Inf_{OA} z = 30 - 6\sqrt{3} \approx 19{,}6$.

b) Pe porțiunea OB avem $x=0$, $y \in [0, 8]$. Deci $z=3y^3+30$, $y \in [0, 8]$. Aplicând schema din punctul precedent, obținem

$z'_y = 6y = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \in [0, 8]$.

Prin urmare, $z(0, 0) = z(0) = 30$,

$z(0, 8) = z(B) = 3 \cdot 64 + 30 = 222$

și $Sup_{OB} z = 222$, $Inf_{OB} z = 30$.

c) Pe segmentul AB avem $y=8-x$, $x\in[0, 8]$. Deci

$z^1 + 3(8-x)^2-6x(8-x)-9x+30=x^3+9x^2-105x+222$, $x\in[0, 8]$.

Aplicând aceeaşi schemă, avem

$z'_x = 3x^2+18x-105=0 \Rightarrow x^2+6x-35=0 \Rightarrow x_1=-3+\sqrt{44}=$

$-3+2\sqrt{11}\in[0, 8]$ şi $x_2=-3-2\sqrt{11}\notin[0, 8]$.

Prin urmare, $z(x_1, y_1=8-x_1)=z(-3+2\sqrt{11}, 11-2\sqrt{11})=$

$(-3+2\sqrt{11})^3+9(-3+2\sqrt{11})^2-105(-3+2\sqrt{11})+222=591-$

$176\sqrt{11}\approx 8,4$;

$z(0, 8)=z(B)=222$; $z(8, 0)=z(A)=470$ şi $Sup_{AB}z=470$,

$Inf_{AB}z=591-176\sqrt{11}\approx 8,4$.

3) Comparând valorile aflate în punctele 1) şi 2), ajungem la concluzia că în acest domeniu funcţia $z=x^3+3y^2-6xy-9x+30$ atinge valoarea cea mai mare pe frontiera domeniului în punctul $A(8, 0)$ şi este egală cu 470. Valoarea cea mai mică funcţia o atinge în interiorul domeniului în punctul $M_2(3, 3)$ şi este egală cu 3.

4) Fiind dată capacitatea $V_0=\frac{a^3}{2}$ pentru un bazin de forma unui paralelipiped dreptunghic, să se determine dimensiunile lui astfel încât să se întrebuinţeze minimum de material (suprafaţa minimă) pentru construcţia lui.

Rezolvare. Fie x şi y dimensiunile bazei bazinului, iar z – înălţimea lui. Volumul bazinului este $V=xyz=\frac{a^3}{2}$, iar aria suprafeţei lui este $S=2xz+2yz+xy$.

Prin urmare, trebuie să aflăm valoarea minimă a funcţiei S cu condiţia $2xyz=a^3$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Avem $z=\frac{a^3}{2xy}$ şi $S(x, y)=\frac{a^3}{y}+\frac{a^3}{x}+xy$.

Cercetăm extremele acestei funcţii:

$$S'_x = y - \frac{a^3}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{a^3}{y^2}.$$

Punctul staţionar este $M(a, a)$, $a>0$.

Ovservăm că $S''_{xx} = \frac{2a^3}{x^3}$ şi $S''_{xx}(a, a) = 2$;

$$S''_{xy} = 1 \text{ şi } S''_{xy}(a, a) = 1;$$

$$S''_{yy} = \frac{2a^3}{y^3} \text{ şi } S''_{yy}(a, a) = 2.$$

Prin urmare, punctul $M(a, a)$ este un punct de minim pentru funcţia $S(x, y)$, deoarece

$$S''_{xx}(a, a) \cdot S''_{yy}(a, a) - \left[S''_{xy}(a, a)\right]^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ şi}$$

$$S''_{xx}(a, a) = 2 > 0.$$

Deci dimensiunile bazinului sunt $x=y=a$, $z=\frac{a}{2}$ şi $S_{min}=$

$$=a^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)+a^2 = 3a^2.$$

Probleme propuse spre rezolvare

5.33. Să se afle estremele funcţiilor de două variabile:

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$,

b) $z = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$,

c) $z = xy^2(1 - x - y)$, d) $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$,

e) $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$, f) $z = xy(x + y - 1)$,

g) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, h) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,

i) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, j) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$,

k) $z = \sin x \sin y$, $x, y \in]0, 2\pi[$,

l) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$,

m) $z = -\frac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2 - 1$, n) $z = 2xy - 4x - 2y$,

o) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$, p) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

5.34. Să se determine extremele funcției de trei variabile:

a) $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z$,

b) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$,

c) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$, d) $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$,

e) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, f) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$,

g) $u = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}$, h) $u = 2x^2 + xy + xz + yz$,

i) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$, j) $u = \left(x + z^2\right)e^{x\left(y^2+z^2+1\right)}$.

5.35. Să se afle extremele funcției:

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ cu condiția $x+y=4$,

b) $z = 8 - 2x - 4y$ cu condiția $x^2 + 2y^2 = 12$,

c) $z = x + 2y$ cu condiția $x^2 + y^2 = 5$,

d) $z = x^2 - y^2$ cu condiția $x + 2y - 6 = 0$,

e) $z = x^2 + y^2 - y - x$ cu condiția $x+y=1$,

f) $z = x^2 + y^2$ cu condiția $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$,

g) $z = (x-1)^2 + y^2$ cu condiția $x^2 - y^2 - 1 = 0$,

h) $z = xy$ cu condiția $2x+3y-5=0$,

i) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ cu condiția $x+y+3=0$,

j) $z = xy^2$ cu condiția $x+2y=1$.

5.36. Să se afle extremele funcției de trei variabile cu legăturile indicate:

a) $u = x - 2y + 2z$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

b) $u = x^2 + y^2 + z^2$ și $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{16} = 1$,

c) $u = x + 2y - 2z$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,

d) $u = 2x + y - 2z$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 36$,

e) $u = x^2 + y^2 + z^2$ şi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$,

f) $u = xy^2z^3$ şi $x + 2y + 3z = 12$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

5.37. Să se calculeze valoarea cea mai mică şi valoarea cea mai mare a funcţiei date în domeniul închis şi mărginit D:

a) $z = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ în $D: \left(x^2 + y^2 \le 1\right)$,

b) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ în $D: \left(x^2 + y^2 \le 25\right)$,

c) $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ în $D: \left(x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y - 6 = 0\right)$,

d) $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ în $D: \left(1 \le x \le 4, -3 \le y \le 2\right)$,

e) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ în $D: \left(x = 0,\ y = 0,\ x + y + 5 = 0\right)$,

f) $z = xy(1 + x + y)$ în $D: \left(y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = -\frac{3}{2}\right)$,

g) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ în $D: \left(x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2\right)$,

h) $z = x^2y(4 - x - y)$ în $D: \left(x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6\right)$,

i) $z = e^{-\left(x^2 + y^2\right)}\left(2x^2 + 3y^2\right)$ în $D: \left(x^2 + y^2 \le 4\right)$,

j) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ în $D: \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$,

k) $z = xy^2$ în $D: \left(x^2 + y^2 \le 1\right)$,

l) $z = x^2 + y^2$ în $D: \left(\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9\right)$.

5.38. Din toate dreptunghiurile cu aceeaşi arie S să se afle acela care are perimetrul minimal.

5.39. Din toate triunghiurile cu acelaşi perimetru ($2p$), să se afle acela care are aria cea mai mare.

5.40. Să se determine dimensiunile paralelipipedului dreptunghic cu cel mai mare volum, dacă aria suprafeţei totale este egală cu S.

5.41. Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu aria S să se determine acela ipotenuza căruia este cea mai mică.

5.42. Să se înscrie într-un con circular drept cu raza bazei R şi înălţimea H un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

5.43. Să se descompună numărul pozitiv m într-un produs de 4 factori pozitivi m_1, m_2, m_3, m_4 astfel încât suma $S = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$ să fie minimă.

5.44. Într-o semisferă de raza R să se înscrie un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

5.45. Să se descompună numărul pozitiv m într-o sumă de trei termeni m_1, m_2, m_3 astfel încât produsul lor să fie maxim.

5.46. Să se determine un punct $M(x, y, z)$ pentru care suma pătratelor distanţelor lui până la n puncte $M_i(a_i, b_i, c_i)$ $(i = 1,2,...,n)$ să fie minimă.

5.47. Să se determine un punct $M(x, y)$ suma pătratelor distanţelor căruia până la dreptele $x=0$, $y=0$ şi $x+2y+16=0$ să fie minimă.

5.48. Prin punctul (m, n, p) să se ducă un plan astfel încât volumul tetraedrului, format de planul acesta şi planele de coordonate, să fie minimal.

5.49. Să se afle dimensiunile unui cilindru circular drept cu cel mai mare volum, dacă aria suprafeţei totale este egală cu 6π.

5.50. Să se afle dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu cel mai mare volum, dacă diagonala lui este egală cu $2\sqrt{3}$.

5.51. Să se determine punctul $M_0(x_0, y_0)$ ce aparţine parabolei $y^2 = 4x$ şi este cel mai apropiat de dreapta $x - y + 4 = 0$.

5.52. Într-o elipsă de ecuaţia $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ să se înscrie un dreptunghi cu aria cea mai mare.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Capitolul 1

1.1. 0; $\dfrac{a+2}{a\left(a^2+3a+3\right)}$; $\dfrac{a\left(a^2+1\right)}{a^3-1}$.

1.2. a^2+ab+b^2; $\dfrac{b}{4}\left(b^2+3a^2\right)$; $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

1.3. $4\sqrt{2}+1$; $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$; 5.

1.4. 7; 3; 2. **1.5.** $2x^2+3x+1$.

1.6. a) $\sin x^2$ și $\sin x^3$; b) 2^{x^5} și 2^{5x}.

1.7. a) x^2-2; b) $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$;

c) $\cos x\left(x+y=t \Rightarrow x=t-y \Rightarrow f(t)=\cos t\right)$; $d) 3x^2+2x+1$.

e) $\sin x\left(x-y=t \Rightarrow x=t+y \Rightarrow f(t)=\sin t\right)$.

1.9. a) $\dfrac{\pi}{3}+2\pi k<x<\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$; b) $[-1, 1]$; c) $[-1, 1]$;

d) $[-1, +\infty[$; e) $[1, 4]$; f) $[0, 4[$; g) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k<\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$;

h) $]-1, 0[\cup]0, 1]$; i) $]4, +\infty[$; j) $[0{,}5; 2]$; k) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; l) $x\neq 0$.

1.10. a) $x=1$; b) $x=5$; c) nu are soluții; d) nu are soluții;
e) nu are soluții; f) $x=1$; g) nu are soluții.

1.11. a) $[2, +\infty]$; b) $[1, 5]$; c) $[0, 7]$; d) $]0, 1]$; e) $]-\infty, 3]$;
f) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; g) $]-\infty, \ln 5[$; h) $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$.

1.12. a) Identice pe orice interval, ce nu conține punctul $x=0$;
b) identice pe axa numerică, considerând $f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;
c) identice pe $[0, +\infty[$; d) identice pe $]0, +\infty[$.

1.13. a) 10; b) 47.

1.14. $2\pi k < x \le (2k+1)\pi$, $k \in Z$ şi $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$.

1.15. a) impară; b) nici pară, nici impară; c) pară; d) pară; e) impară; f) impară.

1.16. a) $y = \left(x^2 + 2\right) + 3x$; b) $y = \left(1 - x^4\right) - \left(x^3 + 2x^5\right)$;

c) $\cos\frac{x}{2} + \left(\sin x + tgx\right)$; d) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1.22. a) Dacă $a=0$, funcţia inversă nu există. Dacă $a \neq 0$, atunci $y = \frac{b}{a}$ pe R.

b) $x_1 = \sqrt{y+1}$ pe $[0, +\infty[$ şi $x_2 = -\sqrt{y+1}$ pe $]-\infty, 0]$;

c) $x = y^{\frac{1}{\lg 5}}$ pe $]0, +\infty[$; d) $x = \frac{1}{2}e^y$ pe R.

1.24. a) $y = \frac{1-\cos 4x}{2}$ este periodică cu $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

b) nu este periodică; c) periodică cu $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$;

d) nu este periodică; e) nu este periodică; f) periodică cu $T = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$. $\left(4\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

1.26. a) $N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right)$, $N_1 = 100$, $N_2 = 1000$;

b) $N(\varepsilon) = E\left(log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$, $N_1 = 5$, $N_2 = 7$;

c) $N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $N_1 = 101$, $N_2 = 1001$;

e) $N(\varepsilon) = E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$, $N_1 = 301$, $N_2 = 3001$.

1.27. a) 3; b) $\frac{5}{4}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{81}{256}$; e) 4; f) 0; g) 2; h) 3; i) -3; j) 1;

k) 1; l) 1; m) 1 ($\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{5n+2} < \sqrt[n]{7n}$, $n = 2,3,...$ şi

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n} = 1$).

1.28. a) *1*; b) $-\infty$; c) ∞; d) *0*; e) $-\frac{1}{3}$; f) *0*; g) *-2*; h) ∞; i) *0*; j) $\frac{1}{3}$; k) ∞; l) ∞.

1.29. a) *2*. (Se demonstrează că $\{y_n\}$ este crescător şi mărginit superior de *2*. Din $y_n = \sqrt{2+y_{n-1}}$, avem $y_n^2 = 2 + y_{n-1}$. Notăm $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n-1} = b$. Deci $b^2 = 2 + b$, de unde $b_1 = 2, b_2 = -1$. Observăm că $b_2 = -1$ nu satisface, deoarece $y_n > 0$ pentru orice $n \in N$); b) $a\,(na - 1 < E(na) \le na$, adică $a - \frac{1}{n} < \frac{E(na)}{n} \le a$).

1.31. a) *6*; b) *0*; c) *-1*; d) $-\infty$; e) $\frac{1}{3}$; f) *0*; g) ∞; h) *0*; i) *1*; j) $\frac{4}{9}$.

1.32. a) *0*; b) $\frac{1}{2}$; c) *0*.

1.33. a) *0*; b) divergent (nu are limită); c) *-1*; d) *2*.

1.34. Consultaţi 1.29 a).

1.35. $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n = a$. Dacă $a=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ poate primi orice valoare $\left(\frac{0}{0}\right)$ sau poate să nu existe (depinde de şirul concret).

1.36. a) $\sqrt{7}$; b) $-\lg 3$; c) *0*; d) *e*; e) *e*; f) $+\infty$.

1.37. Şirul $\{u_n\}$ este strict crescător şi mărginit superior de $\frac{1}{3}$. $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{3}$ cu $N(\varepsilon) = E\left(\lg\frac{1}{3\varepsilon}\right)$.

1.38. a) $\delta(\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{6}$ $\left(\left|x^2+3x-14+10\right| = \left|x^2+3x-4\right| =\right.$

$= \left|x^2-2x+1+5x-5\right| = \left|(x-1)^2+5(x-1)\right| \le |(x-1)^2+5|x-1|| <$

$\left. < \delta^2 + 5\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta^2 + 5\delta - \varepsilon = 0 \Rightarrow 0 < \delta = \frac{-5+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}\right)$.

b) $M(\varepsilon)=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}}$ $\left(\left|\frac{3x^2+1}{5x^2+4}-\frac{3}{5}\right|=\frac{7}{5(5x^2+4)}<\frac{7}{25x^2}<\varepsilon\right)$;

c) $\delta(\varepsilon)\le 28\varepsilon(1+10\varepsilon)^{-1}$

$$\left(|f(x)-A|=\left|\frac{3x+1}{5x+4}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-2}{2(5x+4)}\right|=\right.$$

$$\left|\frac{x-2}{2[5(x-2)+14]}\right|=\left|\frac{x-2}{28-[-10(x-2)]}\right|\le\frac{|x-2|}{28-10|x-2|}<\varepsilon,$$

$$\left.\text{de unde } |x-2|<\frac{28\varepsilon}{1+10\varepsilon}\right);$$

d) $\delta(\varepsilon)\le\frac{-5+\sqrt{25+8\varepsilon}}{4}$ $\left(|f(x)-A|=|2x^2-3x-1-1|=\right.$

$$\left.|2(x-2)^2+5(x-2)|<2\delta^2+5\delta=\varepsilon\Rightarrow 2\delta^2+5\delta-\varepsilon=0\right);$$

e) $\delta\le\varepsilon$ $(|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{x^2+3x+2}{x+2}+1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\frac{(x+1)(x+2)}{x+2}+1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|(x+1)+1|<\varepsilon\Leftrightarrow|x+2|<\varepsilon$).

f) $\delta\le\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$ $\left(|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x^2+4x+3}-\frac{1}{2}\right|=\right.$

$$=\left|\frac{x+1}{(x+1)(x+3)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2}\right|=$$

$$=\left|\frac{2-x-3}{x+3}\right|=\left|\frac{x+1}{x+3}\right|=\frac{|x+1|}{|(x+1)+2|}=\frac{|x+1|}{|2-(-(x+1))|}\le$$

$$\left.\le\frac{|x+1|}{2-|x+1|}<\varepsilon,\quad de\quad unde\quad |x+1|<\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right).$$

1.39. a) Considerăm şirurile $\left\{x_n'\right\}=\{\pi n\}\to+\infty$ şi

$\left\{x_n''\right\}=\left\{2\pi n+\frac{\pi}{2}\right\}\to+\infty$. Atunci $\left\{f\left(x_n'\right)\right\}=\{0\}\to 0$ şi $\left\{f\left(x_n''\right)\right\}=\left\{\sin\frac{\pi}{2}\right\}=\{1\}\to 1$;

b) Pentru şirurile $\left\{x_n'\right\}=\{2\pi n\}\to+\infty$ şi $\left\{x_n''\right\}=\{(2n+1)\pi\}\to+\infty$, avem $\left\{f\left(x_n'\right)\right\}=\{0\}\to 0$ şi $\left\{f\left(x_n''\right)\right\}=\left\{(1-\cos\pi)e^{(2n+1)\pi}\right\}=\left\{2e^{(2n+1)\pi}\right\}\to+\infty$.

c) Considerăm şirurile $\left\{x_n'\right\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}\to 1$ şi $\left\{x_n''\right\}=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}\to 1$. Atunci $\left\{f\left(x_n'\right)\right\}=\left\{e^{n+1}\right\}\to+\infty$ şi $\left\{f\left(x_n''\right)\right\}=\left\{e^{1-n}\right\}=\left\{\frac{1}{e^{n-1}}\right\}\to 0$.

1.40. a) $+\infty$ şi 0; b) 2 şi 0; c) 0 şi $+\infty$; d) 0, dacă $a>1$; $\frac{1}{2}$, dacă $a=1$; a, dacă $0<a<1$; e) ± 1; f) $\mp\infty$; g) $+\infty$ şi 0; h) $\mp\infty$; i) 4 şi 2.

1.41. a) 1; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 3; d) $\pm\infty$; e) 0; f) $\pm\infty$; g) -2; h) -4; i) 1; j) 0; $\frac{1}{2}$; k) ∞; l) $\sqrt{2}$; m) -1; n) $-\sqrt[3]{2}$.

1.42. a) 0; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $-\infty$; e) $\frac{1}{2}$; f) -1; g) $\frac{81}{36}$; h) 0.

1.43. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{3}{2}$; c) 54; d) $\frac{3}{2}\sqrt[6]{2}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (grupăm numărătorul astfel: $\sqrt{x}-\left(1-\sqrt{x-1}\right)$ şi folosim formula $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$).

f) $\frac{5}{64}$; g) 7; h) $\frac{1}{2}$; i) $\frac{3}{7}$; j) $\frac{2}{3}$; k) $-\frac{1}{4}$ (adăugăm şi scădem 2 la

numărător şi folosim formulele $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$); l) $\frac{34}{23}$.

1.44. a) ∞; b) *0*; c) *-1*; d) $\frac{2}{9}$; e) *0*; f) $\frac{1}{2}$; g) *2*; h) $\frac{1}{2}$; i) ±*2*;
j) ∞; k) *0*; l) *0*; m) ±*2*.

1.45. a) $\frac{1}{\pi}$; b) $\frac{8}{7}$; c) $\frac{3}{2}$; d) *4*; e) *0*; f) *1*; g) $\frac{m}{n}$; h) *0*, dacă $n>m$;
1, dacă $m=n$; ∞, dacă $n<m$; i) $\frac{1}{3}$; j) $\frac{1}{2}$; k) $-\frac{a}{\pi}$; l) $\frac{\sqrt{2}}{8}$;
m) *0*; n) *-1*; o) *1*; p) $\frac{\pi}{2}$; r) *1*; s) $2\cos\alpha$.

1.46. a) $\frac{1}{e}$; b) *1*; c) e^{-8}; d) $\frac{1}{e}$; e) *2*; f) *1*; g) $\frac{1}{a}\log_a e=\frac{1}{a\ln a}$;
h) $(a-b)$; i) *1*; j) $\frac{1}{a}$; k) *1*; l) e^{15}; m) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; n) $\sqrt{e}$; o) $\sqrt[3]{e^2}$; p) $e^{-\frac{5}{2}}$;
r) $e^{\ctg a}$.

1.47. a) $\frac{1}{20}$; b) $-\frac{1}{5}$; c) 1; d) -2; e) -1; f) e^{ab}; g) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; h) 1; i) a;
j) ∞ şi *0*; k) ln*a* (facem substituţia $x=\frac{1}{y}$); l) e^{a-b}; m) $\sqrt{e}$; n) $\frac{\ln 6}{\ln 2}$.

1.48. a) $A=1$, $B=-1$; b) $A=1$, $B=\frac{1}{2}$ (pentru a afla *A* se împarte la
x şi pe urmă se trece la limită).

1.49. a) A^n; b) *0*, dacă $B\neq 0$; A^n, dacă $B=0$ şi $A\neq 0$; ∞, dacă
$A\neq 0$, $B=0$; c) $\frac{1}{1+B}$.

1.50. $\alpha=3$, $\beta=-4$, $\gamma=-4$, $p=2$.

1.51. a) $\delta(\varepsilon)=\frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$, $\delta(0{,}01)=\frac{\sqrt{1{,}04}-1}{2}$; b) $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$,
$\delta(0{,}01)=\frac{1}{300}$; c) $\delta(\varepsilon)=M(\varepsilon)=\frac{22}{25\varepsilon}$, $\delta(0{,}01)=88$; d) $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$;
$\delta(0{,}01)=0{,}1$ ($f(0)=0, f(x)=\pm x^2 \Rightarrow |\Delta y|=|\pm x^2|=x^2<\varepsilon$).

1.52. a) Continuă pe R; b) $x=1$ este punct de discontinuitate de speţa 2 (să se consulte §3, exemplul 2); c) $x=-1$ este punct de discontinuitate de speţa 1, dacă $f(-1)\neq 3$; d) $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa 1; e) $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa 1: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)=3$; f) $x=0$ este punct de discontinuitate de speţa 2; g) $x=k\pi$, $k\in Z$, sunt puncte de discontinuitate de speţa 1 h) continuă pe R.

1.53. a) Continuă pe R; b) $x=2$ este punct de discontinuitate de speţa 2; c) $x=3$ este punct de discontinuitate de speţa 1; d) $x=1$ este punct de discontinuitate de speţa 2; e) $x_1=0, x_2=\pi$ sunt puncte de discontinuitate de speţa 1; f) $x=4$ este punct de discontinuitate de speţa 2.

1.54. a) $A\in R$, $B=1$; b) $A=2$; c) $A=1$; d) $A=-\frac{3}{2}$; e) $A=\frac{1}{2}$; f) $A=2$; g) $A=2$; h) $A\in R$, $B=\frac{\pi A}{2}$.

1.55. a) $x_1=0, x_2=-1, x_{3,4}=\pm 2$ sunt puncte de discontinuitate de speţa 2; b) $x_1=0, x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}, n=0,1,2,\ldots$ sunt puncte de discontinuitate de speţa 2; c) $x=2$ este punct de discontinuitate de speţa 1; d) $x=5$ este punct de discontinuitate de speţa 1 $\left(\lim\limits_{x\to 5-0} f(x)=-\frac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to 5+0} f(x)=\frac{\pi}{2}\right)$; e) $x_1=0$ este punct de discontinuitate de speţa 1 ($\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\frac{1}{4}$); $x_2=2^{-1}$ este punct de discontinuitate de speţa 2; f) $x=3$ este punct de discontinuitate de speţa 1; g) $x=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, adică $x\in Z$ sunt puncte de discontinuitate de speţa 1, deoarece $f(x)=\begin{cases}-1, x\notin Z\\ 0, x\in Z\end{cases}$; h) $x=-2$ este punct de discontinuitate de speţa 1; i) $x_1=0$ este punct dc discontinuitate de speţa 2, $x_2=1$ este punct de discontinuitate de speţa 1; j) $x_1=0$ este punct de discontinuitate de speţa 2, $x_2=1$ este punct de discontinuitate de speţa 1; k) $x=1$ este punct dc

discontinuitate de speţa 1 $\lim_{x\to 1-0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+0} f(x)=1$); l) $x_1=0$, $x_2=2$ sunt puncte de discontinuitate de speţa 2.

1.56. a) Acelaşi ordin; b) *f(x)* de ordin inferior; c) echivalente; d) incomparabile; e) acelaşi ordin; f) *f(x)* de ordin inferior; g) acelaşi ordin (adunăm şi scădem 1 din *f(x)*); h) *f(x)* de ordin inferior.

1.57. a) Echivalente; b) *f(x)* de ordin inferior faţă de *g(x)*; c) acelaşi ordin; d) acelaşi ordin (se arată că $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=-\infty$).

1.58. a) $k=\frac{2}{3}$; b) $k=1$; c) $k=3$; d) $k=1$; e) $k=2$; f) $k=\frac{1}{4}$; g) $k=1$; h) $k=2$; i) $k=1$; j) $k=2$.

1.59. a) *5*; b) *1*; c) $\frac{1}{2}$; d) *3*; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{1}{3}$.

1.60. a) *1,01*; b) *0,997*; c) *5,03*; d) *1,15*; e) *0,88*.

1.61. a) $\frac{5}{4}$; b) *4*; c) *3*; d) *2*; e) $\frac{8}{9}$; f) $\frac{2}{3}$; g) $\frac{2}{3}$; h) *0*; i) *1*; j) $-\infty$ (împărţim la $\sqrt[3]{3-x}$); k) $\sqrt{3}$; l) $\frac{2}{9}$.

1.62. a) $-\infty$, dacă $x\to+\infty$; $+\infty$, dacă $x\to-\infty$;

b) $\frac{4}{31}[(a+2x)^2\cdot(b-x)^3-(2x)^2\cdot(-x^3)=-4x^5$

şi $(a+x)^5+(b-2x)^5\sim x^5+(-2x)^5=-31x^5$];

c) $-\frac{9}{4}$ (aducem la numitorul comun); d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

e) $-\frac{\pi^2}{2}$ (facem substituţia $x=\frac{1}{t}$);

f) $4\ln 3$ (facem substituţia $x=\frac{1}{t}$).

Capitolul 2

§ 1

2.1. a) $\frac{5}{8}$, b) $\frac{9}{7}$.

$$f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^3+6x)-\ln 7}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\frac{x^3+6x}{7}}{x-1}=\left|\begin{matrix}x-1=u\\ x=u+1\\ u\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{u^3+3u^2+9u}{7}\right)}{\frac{u^3+3u^2+9u}{7}}\cdot\frac{u^3+3u^2+9u}{7u}\right]=$$

$$=\lim_{u\to 0}\left(1\cdot\frac{u^3+3u^2+9u}{7u}\right)=\frac{9}{7}\ );$$

c) $24\cos 17\left(\lim_{x\to 2}\frac{\sin(2x^3+1)-\sin 17}{x-2}=\right.$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\sin(x^3-8)\cdot\cos(x^3+9)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[2\cos(x^3+9)\cdot\frac{\sin(x^3-8)}{x^3-8}\cdot\frac{x^3-8}{x-2}\right]=$$

$$\left.=2\cdot\cos 17\cdot 1\cdot\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=24\cos 17\right);$$

d) 4; e) $8\ln 2$; f) -3; g) $\frac{1}{3}$; h) 1; i) -3; j) 5.

2.2. a) $f'(1-0)=-1,\ f'(1+0)=1$; b) $f'(0-0)=-1,$ $f'(0+0)=1$; c) $f'(0-0)=-1,\ f'(0+0)=0$;

d) $f'(0-0)=f'(0+0)=1$;

e) $f'(-1-0)=-2,\ f'(-1+0)=f'(1-0)=0,\ f'(1+0)=2$;

f) $f'(0-0)=f'(0+0)=0$; g) $f'(0-0)=-1,\ f'(0+0)=1$;

$$\left(f'(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=-1.\right)$$

Similar $f'(0+0)=1$).

2.3. a) $y' = 2x\left(5x^3 + 6x^2 + 3\right)$; b) $y' = \dfrac{x - 1 + 2x^{10}\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$;

c) $y' = \dfrac{-3x^2 + 2x + 2}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$; d) $y' = -\dfrac{3\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}}}{6\left(x - 2\sqrt[3]{x}\right)^2}$;

e) $y' = -\dfrac{\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}}{2\sin^3\dfrac{x}{2}}$; f) $y' = \dfrac{x(\cos x - \sin x) - \sin x - e^x}{x^2 \cdot e^x}$;

g) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}\left(2 - \sqrt{x}\right)^2}$; h) $y' = -\dfrac{2x}{\left(1 + x^2\right)\sqrt{1 - x^4}}$;

i) $y' = \sin^{-2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; j) $y' = \dfrac{1}{2}\left(1 + x^2\right)^{-1}$;

k) $y' = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}} \cdot (1 + x)$; l) $y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \cdot \ln 2$;

m) $y' = \dfrac{x}{\left(2 + x^2\right)\sqrt{1 + x^2} \cdot arctg\sqrt{1 + x^2}}$; n) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

o) $y' = cth\, x\left(1 - \dfrac{1}{2shx}\right)$; p) $y' = e^{-x}(a\, ch\, ax - sh\, ax)$;

r) $y' = \dfrac{1}{ch2x}$; s) $y' = \dfrac{\pm 1}{ch\, x}$;

t) $y' = th\, x$; u) $y' = \pm\sqrt{1 + ch\, x} = \pm\sqrt{2}ch\dfrac{x}{2}$;

v) $y' = \dfrac{1}{2}\left(sh\dfrac{x}{2} + ch\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$; w) $y' = 4\text{sh}4x$.

2.4. a) $\dfrac{(x - 3)(19x - 17)}{(x + 1)^4}$; b) $\dfrac{10 - 2x - 2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x + 2)^2(x - 1)}}$;

c) $\sqrt[4]{x} \cdot \dfrac{1 - x}{1 + x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x\left(\dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{2x}{1 + x^2} + \right.$

$+3ctg\,x-2tg\,x\big)$;

d) $x^2\left(\ln x+1\right)=x^3\cdot\ln ex$;

e) $\dfrac{x\left(7x^3-3x^2-42x+32\right)}{4\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{(x+2)^3}\cdot\sqrt[4]{(x-2)^5}}$;

f) $(\ln x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x\cdot\ln(\ln x)}{x^2\ln x}$;

g) $-\dfrac{14x^2+35x-13}{2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$;

h) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3\left(x^2+1\right)}{\sqrt[5]{5-x}}}\cdot\dfrac{\left(-24x^3+125x^2-14x+75\right)}{15x\left(x^2+1\right)(5-x)}$;

i) $\dfrac{\cos x\left(1-8\sin^3 x\right)}{3\sqrt[3]{\sin^2 x(1-\sin 3x)^4}}$;

j) $\dfrac{-\left(5x^2+x-24\right)}{3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^5}\cdot\sqrt{(x+3)^5}}$;

k) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\dfrac{1}{x+1}+\ln\dfrac{x}{x+1}\right)$;

l) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\cdot\sqrt{1-e^x}}\left[\dfrac{1}{x}+ctgx-\dfrac{e^x}{2\left(1-e^x\right)}\right]$;

m) $\dfrac{2}{x}\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\dfrac{1}{(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right]$;

n) $(cos\,x)^{sin\,x}\cdot\left[(cos\,x)\,ln(cos\,x)-(tgx)\,sin\,x\right]$.

2.6. a) $A=2;\ B=0$; b) $A=2x_0,\ B=-x_0^2$ (condiția de continuitate: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ și condiția de derivabilitate $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$ formează un sistem de două ecuații cu necunoscutele A și B); c) $A=-\dfrac{1}{2},\ B=\dfrac{3}{2}$; d) $A=\dfrac{2}{e};\ B=-1$ (să se consulte cazul b) de mai sus).

2.7. a) Derivabilă pentru $x\in[-1,\ 0[\ U\ ]0,\ 1]$ $\left(f'(0+0)=-1,\ f'(0-0)=1\right)$;

b) Derivabilă pe $R^+\left(f'(1-0)=f'(1+0)=\dfrac{5}{4}\right)$;

c) Derivabilă pe $R\left(f'(1-0)=f'(1+0)=0\right)$;

d) Derivabilă pentru orice $x\neq 0$ $\left(f'(0-0)=2,\ f'(0+0)=1\right)$;

e) Derivabilă pentru orice $x\neq e$ $\left(f'(e-0)\neq f'(e+0)\right)$.

2.8. a) $-\frac{2t}{t+1}$; b) $-3\cdot 2^{4t}$; c) $2\cos^2 t\left(\cos 2t-2\sin 2t\right)$

f) $y'_t=\frac{4\cos^2 t-1}{3-4\cos^2 t}\cdot tgt=\frac{1-2\cos 2t}{1-2\cos 2t}\cdot tgt;\ tg\frac{\pi}{6}=\frac{2tg\frac{\pi}{12}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{12}}\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$); d) $-\sqrt{\frac{2-t^2}{1-4t^2}}$; e) 1; f) -1; g) 1;

h) $-tgt$; i) -1; j) $ctht$; k) $\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}$; l) 1.

2.10. a) $\frac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y\left(2y^2-x^2\right)}$; b) $-\sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^4}$; c) $\frac{e^y\sin x-e^x\sin y}{e^y\cos x+e^x\cos y}$;

d) $\frac{2^x\left(2^y-1\right)}{2^y\left(1-2^x\right)}$; e) $\frac{x+y}{x-y}$; f) $\frac{2y^2}{n\left(y^2-x^2\right)+2xy}$;

g) $\frac{n\left(x^4-y^4\right)+4x^2y^2}{4x^3y}$; h) $1-\ln a\left(a^x=e^{x-y}\right)$; i) $\frac{x(1+\ln x)+y}{x(1-\ln x)}$

(să se logaritmeze în baza e); j) $\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$ (logaritmăm în baza

e); k) $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; l) $\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$; m) $\frac{1+y^2}{y^2}$;

n) $\frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$.

2.11. Să se deriveze ambele părţi ale formulei.

2.12. Să se deriveze identităţile caracteristice. Exemplu: funcţia pară este caracterizată de identitatea: $f(x)=f(-x)$, de unde $f'(x)=-f'(-x)$. Adică funcţia $f'(-x)$ este impară etc.

2.13. a) $\frac{3\sqrt{3}-4}{6}$; b) 12; c) $\frac{3\left(2\sqrt{2}+1\right)}{8\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}}$; d) $-\frac{8}{\pi^2}$; e) *2*; f) *1*;

g) *1*; h) *1*; i) $\frac{3}{17}$; j) $\frac{1}{9}$; k) *1* ($y'_x = \frac{\cos 2t}{(1+\cos 2t)tgt}$, $tg\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} \Rightarrow tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$); l) *1*; m) $\frac{2}{3}a, -\frac{a}{3}$; n) $\frac{1}{e}$; o) $\frac{4}{3}$ şi *7*.

2.14. a) $x'_y = \frac{\left(1-x^2\right)}{2} = \frac{2e^y}{\left(e^y+1\right)^2}$; b) $x'_y = \sin 2y = 2\sqrt{x(1-x)}$;

c) $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{chx}$; d) $x'_y = \frac{1}{shx} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$;

e) $x'_y = \frac{1}{4x-1} = \frac{1}{\sqrt{1+8y}} = \frac{1}{ch\,x}$;

f) $x'_y = e^{-\arcsin x}\cdot\sqrt{1-x^2} = \frac{\cos(\ln y)}{y}$;

g) $x'_y = -\frac{\left(1+x^4\right)^2}{8x^3} = -\frac{1}{2\sqrt{1+y}\cdot\sqrt[4]{\left(1-y^2\right)^3}}$;

h) $x'_y = -\frac{\sqrt{1-x^6}}{3x^2} = -\frac{\sin y}{3\sqrt[3]{\cos^2 y}}$.

2.15. a) $y^v=240$, $y^n=0$ pentru orice $n>5$, $n\in N$;

b) $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$, $n\in N$;

c) $y^{(n)} = 3^x \ln^n 3$, $n\in N$;

d) $y^{(n)} = [2^x + (-1)^n\cdot 2^{-x}]\ln^n 2$, $n\in N$;

e) $y^{(n)} = k^n\cdot e^{kx}$, $n\in N$;

g) $y^{(n)} = 2^{n-1} \cdot \cos\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in N; \left(\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right);$

h) $y^{(n)} = n!, \ y^{(n+k)} = 0,$ pentru orice $k \in N;$

i) $y^{(n)} = 2^{n-1} \cdot \sin\left[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right], n \in N; \left(\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)$

j) $y^{(n)} = e^x(n+x), \ n \in N;$ k) $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}, \ n \in N.$

2.16. a) $2e^{-x}(\sin x + \cos x);$ b) $\frac{2}{x};$ c) $x \sin x - 3\cos x;$

d) $6\cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x;$ e) $e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6);$

f) $\frac{2}{\cos^4 x}\left[(3 - x^2) - (4x^2 + 3)\sin^2 x + 3x \sin 2x\right].$

2.17. a) $8 \cdot \left(arctg 2x + \frac{2x}{1 + 4x^2}\right);$ b) $9t^2 + 2t;$

c) $2\left[\ln(1 + x^2) + \frac{1 + 3x^2}{1 + x^2}\right];$ d) $\frac{6(12 - 4xy^3 + x^4y^2 - 6x^5 + 2x^7 y)}{(x^3 - 2y)^3};$

e) $-\frac{3(6t^2 + 1)}{4t(6t^2 - 1)};$ f) $2\sqrt{1 - x^2};$ g) $-\frac{1}{8\sin^4 \frac{t}{2}};$ h) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}};$

i) $-\sqrt{t};$ j) $x \sin 3x;$ k) $\frac{x + y}{(1 - x - y)^3};$ l) $\frac{y(y^2 - 2y + 2)}{x^2(1 - y)^3};$ m) $\frac{2}{t^2 - 1}.$

2.19. $-\frac{1}{16}.$

2.20. a) $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt{x^2}\right)^2}};$ b) $\frac{1}{2x\sqrt{x - 1}};$ c) $\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}};$

d) $x^{tgx}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{tgx}{x}\right);$ e) $\frac{3e^{\sqrt{x}}\left(2 + \sqrt{x}\right)}{10\sqrt[5]{\left(1 + x \cdot e^{\sqrt{x}}\right)^2}};$ f) $-th x;$ g) $\sqrt{\frac{x}{x - 4}};$

h) $\frac{2e^x\left(e^x-1\right)}{e^{2x}+1}$; i) $tg^5 x$.

2.21. a) $\frac{1-(n+1)x^n+n\cdot x^{n+1}}{(1-x)^2}$ (ambele părți ale formulei se derivează);

b) $\frac{2x-(n+1)x^{n+1}+2n(n+2)x^{n+2}-n(n+1)\cdot x^{n+3}}{(1-x)^3}$ (ambele părți din a) le înmulțim cu x^2 și le derivăm);

c) $\frac{1+x-(n+1)^2x^n+\left(2n^2+2n-1\right)x^{n+1}-n\cdot x^{n+2}}{(1-x)^3}$ (ambele părți din a) le înmulțim cu x și le derivăm).

2.22. a) $y_{tg}=9x-14$; $y_n=-\frac{1}{9}x+\frac{38}{9}$;

b) $y_{tg}=-44x-76$; $y_n=\frac{1}{44}x+\frac{265}{22}$.

2.23. a) $M_1(-1,10)$, $M_2(1,2)$; b) $M_1(-2,8)$, $M_2(2,4)$;

c) $M_1\left(-\sqrt{2},\left(3\sqrt{2}+6\right)\right)$, $M_2\left(\sqrt{2},6-3\sqrt{2}\right)$.

2.27. a) $2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; b) $arctg\,x\,dx$; c) $-\frac{6x^2dx}{\left(x^3+1\right)^2}$;

d) $5^{\ln tg\,x}\cdot\frac{2\ln 5}{\sin 2x}dx$; e) $\left[\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}\cdot\sqrt{1-x^2}}+\frac{2arctg\,x}{1+x^2}\right]dx$;

f) $\left(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{2}{x^3}\ln 3+9x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$; g) $-\frac{y}{x+2y}dx$; h) $\frac{3x^2}{1-3y^2}dx$;

i) $\frac{dx}{1-a\cos y}$; j) $\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\left(3x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$; k) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

2.29. *34,02 (m^3).* **2.30.** *12,73 (m^3).*

2.31. a) *0,995*; b) *0,786* și *0,784*; c) *0,5256*; d) *0,355*; e) *9,6*.

2.32. *19,7π (m^3)* $\left(S=\pi R^2\Rightarrow dS=2\pi R\cdot\Delta R\Rightarrow\Delta S\approx dS\right)$.

2.33. $1{,}0935\pi\,(m^3)$ $\left(V=\pi R^2H \Rightarrow dV=\pi R^2\cdot R^2\cdot \Delta h \Rightarrow\right.$
$\left.\Rightarrow \Delta V\simeq dV\right)$.

2.34. $\frac{1}{300}$ $\left(V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow dV=4\pi R^2\cdot dR \Rightarrow\right.$
$\left.\Rightarrow \frac{dV}{V}=3\frac{dR}{R}\Rightarrow \frac{dR}{R}=\frac{1}{3}\cdot\frac{dV}{V}=\frac{1}{3}\cdot 1\%=\frac{1}{300}\right)$.

2.35. a) $2e^{-x^2}(2x-1)dx^2$; b) $-16\sin 4x\,dx^3$; c) $\frac{11-6\ln x}{x^4}dx^3$;
d) $e^{-3x}(5\cos 2x+12\sin 2x)dx^2$ şi $e^{-3x}(9\cos 2x-46\sin 2x)dx^3$;
e) $\frac{18}{5}dx^2$; f) $-dx^3$; g) $24(2x-3)dx^2$ şi $48dx^3$;
h) $\frac{4\ln x-4-\ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x-4)^3}}dx^2$.

2.36. a) nu este aplicabilă ($f'\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$f'\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$);
b) aplicabilă, $c=1$;
c) nu este aplicabilă ($x=0$ este punct de discontinuate de speţa 2);
d) aplicabilă, $c=0$.

2.37. a) Se aplică teorema Lagrange pentru $y=\sin x$ pe $[a, b]$ şi se ţine seama că $|f'(c)|=|\cos c|\le 1$. b) Acelaşi lucru pentru $y=tg\,x$ pe $[a, b]$ şi că $\cos^2 a>\cos^2 c>\cos^2 b$; c) Aplicăm teorema Lagrange pentru funcţia $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x-\pi$ pe $[-1, x_1]$ cu $x_1\in\left]-1,0\right]$. Observăm că $f'(x)=0$ $(|x|=-x!)$ şi deci $f(x)=const$. Considerăm $x=-1\in[-1, 0]$. Avem $f(-1)=const=0$.
d) Acelaşi lucru are loc cu funcţia

$f(x)=\arcsin x+3\arccos x+\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\pi$ pe $[x_1,x_2]$ cu $x_1, x_2\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

e) Se procedează ca mai sus cu $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2arctgx$.

f) Considerăm $f(x)=\arcsin x+\arccos x-\frac{\pi}{2}$ şi se procedează ca în cazul a).

g) Aplicăm teorema Lagrange pentru funcţia $f(x)=\ln x$ pe $[1,1+x]$ cu $x\in]0,+\infty[$. Avem

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{1+x-1}=\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{c}\Rightarrow\ln(1+x)=\frac{x}{c}\text{ cu }1<c<1+x.$$

Din $1<c<1+x$ rezultă $1>\frac{1}{c}>\frac{1}{1+x}$, adică $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{c}<1$ sau $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{c}<x$ (deoarece $x>0$). Prin urmare, $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

2.39. a) $\frac{e}{e-1}$; b) $\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

2.40. $c=1,2$. **2.41.** $11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$.

2.42. $2(x+1)^3-9(x+1)^2+17(x+1)-9$.

2.43. a) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin n\cdot\frac{\pi}{2}+R_n(x)$;

b) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos n\cdot\frac{\pi}{2}+R_n(x)$;

c) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+R_n(x)$.

d) $arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_n(x)$;

e) $3^x=\sum_{i=0}^{n}\ln^i 3\cdot x^i+R_n(x)$ (să se consulte ex. **2.15.** c) din §1);

f) $e^{x^2} = \sum_{i=0}^{n} k^i \cdot x^i + R_n(x)$ (vezi ex. **2.15.** e) din §1);

g) $2^x + 2^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \left[1 + (-1)^k\right] \ln^k 2 \cdot x^k + R_n(x) =$

$2\sum_{k=0}^{n} \ln^{2k} 2 \cdot x^{2k} + R_{2k}(x)$, vezi ex. **2.15.** d) din §1).

h) $\cos^2 x = 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} \cos k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot x^k + R_n(x)$ vezi ex. **2.15.** f) din §1).

2.44. a) $\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 -$

$\frac{10}{243}(x-1)^4 + R_4(x)$;

b) $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + R_3(x)$;

c) $tgx = x - \frac{1}{3}x^3 + R_3(x)$; d) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + R_3(x)$;

e) $\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-1)^3 + R_3(x)$.

2.45. a) $\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$; b) $\frac{a^2}{b^2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) -2; e) 1; f) 0; g) $-\frac{1}{20}$;

h) $\frac{2}{3}$; i) $0{,}18$; j) 18; k) 1; l) $\frac{1}{2}$; m) $-\infty$; n) 0; o) -2; p) 0.

2.46. a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\frac{1}{6}$; d) -1; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{2}{\pi}$; g) 0;

h) $-\frac{4}{\pi}$; i) $\frac{2}{\pi}$; j) 1; k) $\frac{1}{a}$; l) 0; m) $\frac{1}{12}$; n) $\frac{a^2}{2}$; o) -1;

p) $\frac{2}{3}$; r) $\frac{1}{2}$.

2.47. a) 1; b) $e^{\frac{2}{\pi}}$; c) $e^{-\frac{1}{30}}$; d) $e^{\frac{1}{3}}$; e) $e^{-\frac{a^2}{2}}$; f) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; g) 1;
h) 2; i) 1; j) 1; k) e^2; l) 1; m) e^2; n) e^{-1}; o) e^{-1}; p) e^3.

2.48. a) Se demonstrează că funcția $f(x) = arctgx - x + \frac{x^3}{6}$ este

necrescătoare pe $[0, 1]$;

b) Se demonstrează că funcția $f(x)\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1 - \sqrt[3]{x^2}$ este necrescătoare pe $[0, +\infty[$;

c) Funcția $f(x) = x + \frac{x^3}{3} - tgx$ este nedescrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $f(x) = e^x - 1 - x$ este nedescrescătoare pe $[0, +\infty[$;

e) $f(x)arctgx - \frac{x}{1+x^2}$ este nedescrescătoare pe $[0, +\infty[$;

f) $f(x) = \sin x + tgx - 2x$ este nedescrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

g) $f(x) = 1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$ este nedescrescătoare pe $[0, +\infty[$;

2.49. a) $A \le 0$; b) $A \ge 1$.

2.50. a) $y_{min} = f\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) = 3$; b) $y_{max} = f(0) = 2$;

c) $y_{min} = f(4) = -e^4$; d) $y_{max} = f(1) = 3$, $y_{min} = f(2) = 0$;

e) $y_{max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$, $y_{min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

$y_{min} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$; f) $y_{min}=f(0)=0$ (y' nu există, folosim definiția punctului de minim); g) $y_{max} = f(1) = \frac{7}{3}$; $y_{min} = f(3) = 1$;

h) $y_{min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$; i) Nu are extreme;

j) $y_{min} = f(1) = 2$; $y_{max} = f(-1) = -2$;

k) $y_{max} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$; l) $y_{min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$;

m) Nu are extreme; n) $y_{max} = f(0) = 2$; $y_{min} = f(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$.

2.51. a) $y_{max} = f(-3) = -\frac{2}{3}$; $y_{min} = f(0) = \frac{5}{6}$; $y_{max} = f(1) = \frac{50}{53}$;

b) $y_{min} = f(0) = 0$; c) $y_{min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -11{,}25$; $y_{max} = f(3) = 0{,}2$;

d) $y_{max} = f(-3) = 3\sqrt[3]{3}$; $y_{min} = f(2) = -\sqrt[3]{44}$;

e) $y_{min} = f(t=1) = -2$; f) $y_{min} f(t=1) = \frac{3}{2}$.

2.52. a) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f(4) = \frac{3}{5}$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) = f(0) = -1$;

b) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f(-3) = 66$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) = f(\pm 1) = 2$;

c) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{8}}$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) = f(\pm 1) = 0$;

d) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\ln 3}{4}$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\ln 3}{4}$;

e) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$;

f) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f(-2) = \frac{16}{3}$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) = f(3) = -\frac{37}{4}$;

g) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f(\pm 1) = 1$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) = f(0) = 0$;

h) $\underset{[a,b]}{Supf}(x) = f(1) = 1$, $\underset{[a,b]}{Inff}(x) = f(-2) = -2$.

2.54. $p = -6$; $q \in R$. **2.55.** $A = 2$. **2.56.** $A = -\frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{6}$.

2.57. $\frac{7}{2}$ şi $-\frac{7}{2}$. **2.58.** Pătrat cu latura 5. **2.59.** $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

2.60. $x = R\sqrt{2}$ [$S=xy=x\sqrt{4R^2-x^2}$, $P=2(x+y)=2(x+\sqrt{4R^2-x^2})$, $S'=0, P'=0 \Rightarrow x = R\sqrt{2}$, $S''<0, P''<0$].

2.61. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\left(P=2x+y;\ \frac{x}{\sin\alpha} = 2R\ ;\ y^2=x^2+x^2-\right.$

$-2x\cdot x\cdot\cos(\pi-2\alpha)=2x^2+2x^2\cos 2\alpha=2x^2\cdot 2\cos^2\alpha=4x^2\cos^2\alpha;$

$y=2x\cos\alpha=2\cdot 2R\sin\alpha\cos\alpha=2R\sin 2\alpha;\quad P=4R\sin\alpha+2R\sin 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow P'=0 \Rightarrow \cos\alpha+\cos 2\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}\Rightarrow P''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0\Big).$

2.62. $h = R\cdot\sqrt{2}$ $\left(S=2\pi rh=2\pi h\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}=\pi h\sqrt{4R^2-h^2}\Rightarrow\right.$

$\Rightarrow S'=0\Rightarrow h=R\sqrt{2}\Rightarrow S''(R\sqrt{2})<0\Big).$

2.63. $h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ $\left(V=\pi r^2h=\pi h\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)=f(h)\Rightarrow\right.$

$\left.\Rightarrow f'(h)=0\Rightarrow=\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right).$

2.64. $r=h=a$ $\left(V=\pi r^2h=\pi a^3\Rightarrow h=\frac{a^3}{r^2}\Rightarrow\right.$

$\Rightarrow V=\pi(r+d)^2\cdot d+\left[\pi(r+d)^2-\pi r^2\right]h=$

$\left.=\pi d\left[(r+d)^2+(2r+d)\cdot\frac{a^3}{r^2}\right]\Rightarrow V'=0\Rightarrow r=a,\quad h=a,\quad V''(a)>0\right).$

2.65. 4 şi 4. **2.66.** 1. **2.67.** $h=R\sqrt{3}$

$\left(V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{R^2h^3}{h^2-R^2}\cdot h=\frac{\pi R^2h^3}{3\left(h^2-R^2\right)}\Rightarrow V_h'=0\Rightarrow h=R\sqrt{3}\right).$

2.68. $x=\frac{1}{6}d$ $\left(V=xd(d-2x)^2\Rightarrow\right.$

$\left.\Rightarrow V'=(d-2x)(d-6x),\quad V''=(24x-8d)\right).$

2.69. a) $x=4$ este punct de inflexiune, convexă pe $]-\infty,4[$, concavă pe $]4,+\infty[$;

b) $x=1$ este punct de inflexiune, convexă pe $]-\infty,1[$, concavă pe $]1,+\infty[$;

c) concavă $]-\infty,+\infty[$;

d) $x=e^{-2}$ este punct de inflexiune, concavă pe $]e^{-2},+\infty[$, convexă pe $]-\infty,e^{-2};[$

e) $x_1=-2, x_2=1$ sunt puncte de inflexiune, concavă pe $]-\infty,-2[U]1,+\infty[$, convexă pe $]-2,1[$;

f) $x_1=-1$ este punct de inflexiune, convexă pe $]-\infty,-1[$, concavă pe $]-1,+\infty[$.

g) concavă pe $]-\infty,+\infty[$; h) $x_1=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ este punct de inflexiune, concavă pe $\left[-\frac{\pi}{2},x_1\right]$, convexă pe $\left]x_1,\frac{\pi}{2}\right[$.

2.70. $A=-\frac{3}{2}, B=\frac{9}{2}$. **2.71.** $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$.

2.72. $3b^3-8ac>0$. **2.73.** $|a|\le 2$.

2.74. Indicaţie: $y''(x)=0\Rightarrow x_1=1, x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$.

Se verifică că punctul $x_1=1$ aparţine dreptei $\frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{y-y_2}{y_3-y_2}$.

2.75. a) $x=-1, y=x-1$; b) $x=-1, y=\frac{1}{2}x-1$; c) $y=x$;

d) $x=-\frac{1}{e}, y=x+\frac{1}{e}$; e) $x=0, y=x+1$; f) $x=\pm 3$;

g) $x=1, y=0$; h) $x=0, y=0$; i) $y=x+2$; j) $y=1$; k) $x=3, y=x-3$;

l) $x=\pm\frac{\pi}{2}x-1$; m) $y=x$; n) $x=\pm 2$; o) $x=0, y=2x-\frac{\pi}{2}$;

p) $x=-2, y=x+1$, când $x\to+\infty$ şi $y=-x-1$, când $x\to-\infty$.

2.76. $k=\infty$.

2.77. a) Asimptotă verticală: $x=-1, O(0,0)$,

$y_{max}=f(-2)=-4, y_{min}f(0)=0$, convexă pe $]-\infty,-1[$, concavă pe $]-1,+\infty[$, $\lim_{x\to-1-0}f(x)=-\infty, \lim_{x\to-1-0}f(x)=+\infty$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $O(0,0)$,

$y_{min}=f(-1)=-\frac{1}{e}$, $x=-2$ este punct de inflexiune, convexă pe $]-\infty,-2[$, concavă pe $]-2,+\infty[$.

c) Impară, periodică cu $T=2\pi$, asimptote:

$x=\pi k, k\in Z$, $y_{min}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$, $y_{max}=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$ convexă pe $]-\pi,0[$, concavă pe $]0,\pi[$.

d) Asimptote: $x=0$, $y=0$, $f(x)$ este descrescătoare pe $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ $(y'<0)$, concavă pe $\left]0,\frac{8}{9}\right[$, convexă pe $]-\infty,0[\cup\left]\frac{8}{9},1\right[$, $\lim_{x\to0-0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0+0} f(x)=+\infty$, $x=\frac{8}{9}$ – punct de inflexiune.

e) Impară, $O(0,0)$. Asimptota $y=0$,

$y_{max}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=arctg\sqrt{2}-arctg\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}34$,

$y_{min}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx -0{,}34$, $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2+3\sqrt{2}}$ sunt puncte de inflexiune, concavă pe $]x_3,0[\cup]x_2,+\infty[$, convexă pe $]-\infty,x_3[\cup]0,x_2[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

f) Asimptota $y=x+1$, $A(-3,0)$, $O(0,0)$,

$y_{max}=f(-2)=\sqrt[3]{4}$, $y_{min}=f(0)=0$, concavă pe $]-\infty,-3[$, convexă pe $]-3,+\infty[$, $A(-3,0)$ este punct de inflexiune, $O(0,0)$ este punct de întoarcere (min);

g) $A\left(0,-\frac{9}{4}\right)$, $B(-3,0)$. Asimptote:

$x=4$, $y=x+10$, $y_{max}=f(-3)=0$, $y_{min}=f(11)=28$,

concavă pe $]4,+\infty[$, convexă pe $]-\infty,4[$.

h) $O(0,0)$, impară , asimptota $y=0$,

$y_{min} = f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq -0,6$, $y_{max} = f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$,

concavă pe $]-\sqrt{3}, 0[\ U\ ]\sqrt{3}, +\infty[$,

convexă pe $]-\infty, -\sqrt{3}[\ U\ ]0, +\sqrt{3}[$.

Punctele de inflexiune sunt $O(0, 0)$,

$A\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\, e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\, e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

i) $|x| > 1$, $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = -\infty$,

Asimptote: $x = \pm 1$, $y_{max} = f\left(-1-\sqrt{2}\right) \approx f(-2,41) \approx 0,84$,

$y'' < 0$, convexă pe $]-\infty, -1[\ U\ ]1, +\infty[$.

j) $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$, $O(0,0)$.

Asimptote: $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$, $y_{max} = f(-3) = -\frac{27}{8}$, concavă pe $]0, +\infty[$, convexă pe $]-\infty, -1[\ U\ ]-1, 0[$, $x = 0$ – punct de inflexiune.

k) $O(0,0)$, asimptota $y = x - 2$, $y' \geq 0$ (funcţia este crescătoare pe R), concavă pe $]-9-3\sqrt{6}, -9+3\sqrt{6}[\ U\ ]0, +\infty[$, convexă pe $]-\infty, -9-3\sqrt{6}[\ U\ ]-9+3\sqrt{6}, 0[$. Punctele $(0, 0)$, $(-9-3\sqrt{6}, -18,4)$, $(-9+3\sqrt{6}, -1,7)$ sunt puncte de inflexiune.

l) $x \neq 0$, asimptote $x=0$, $y=x$, $y_{min} = f(2) = 3$, $y'>0$ pe $]-\infty,0[\cup]2, +\infty[$, $y'<0$ pe $]0,2[$, concavă pe $]-\infty,0[\cup]0, +\infty[$.

Capitolul 3

3.1. a) $7+i$; b) $-11+2i$; c) $-5+2i$; d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; e) $\frac{9}{5}-\frac{8}{5}i$;

f) $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$; g) $-524+7i$; h) $\frac{1}{10}-\frac{13}{10}i$; i) $-m+ni$; j) i; k) $2a$; l) $-1+i$.

3.2. a) $x=1$, $y=2$; b) $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$; c) $x=3$, $y=-4$; d) $x=2$, $y=1$; e) $x=-\frac{5}{14}$, $y=-\frac{1}{14}$; f) $x=t$, $y=\frac{2}{3}(4-t)$, $t\in R$; g) $x=0$, $y=7$.

3.3. a) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$; b) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $e^{\frac{\pi}{6}i}$;

c) $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$, $2\cos\frac{\pi}{14}e^{\frac{\pi}{14}i}$;

d) $\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$, $e^{-\frac{\pi}{2}i}$; e) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$;

f) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

3.4. Să se folosească diagrama vectorială.

3.5. a) $\frac{3}{2}-2i$; b) $\frac{3}{4}+i$. **3.7.** a) $z_1=1$, $z_2=i$; b) $z_1=2+i$, $z_2=2-i$.

3.8. a) 2; $b=512\left(1-i\sqrt{3}\right)$; c) $4+4\sqrt{3}i$; d) -243; e) -27;

f) $\frac{32}{243}i$.

3.10. a) $\pm(2+3i)$; b) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; c) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$;

d) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)\right]$, $k=0,1,2,3$;

e) $\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$, $k=0,1,2$;

f) $2\sqrt[5]{2}\left[\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right]$, $k=0,1,2,3,4$;

g) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)\right]$, $k=0,1,2,3$;

h) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)\right]$, $k=0,1,2,3,4,5$;

i) $5\left[\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right]$, $k=0,1,2$;

j) $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)=2\left[\cos\left(\pi k-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi k-\frac{\pi}{6}\right)\right]$, $k=0,1$.

3.11. a) Exteriorul cercului de raza 5 cu centrul în origine.

b) cercul închis $x^2+(y-4)^2\le 4$;

c) exteriorul cercului de raza 4 cu centrul $(0, -2)$;

d) cercul deschis $(x+1)^2+(y+1)^2<4$;

e) inelul deschis $1<x^2+y^2<9$; f) bisectoarea $y=x$;

g) cadranul întâi, fără punctele de pe axele de coordonate;

h) $y\le -3$; i) $x=0$; $x+y\ge 1$.

3.12. a) $(m+4ni)(m-4ni)$; b) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{ni}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{ni}\right)$;

c) $(1+tg\alpha\cdot i)(1-tg\alpha\cdot i)$; d) $\left(\sqrt{7}+\sqrt[4]{5}i\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt[4]{5}i\right)$.

3.14. Să se folosească forma exponențială a numărului complex.

3.15. a) $i\,\mathrm{sh}1$; b) $\cos 1\cdot\mathrm{ch}1-i\,\mathrm{sh}1\sin 1$; c) $i\sin 3$; d) $\cos 5$;

e) $\mathrm{ch}2\cos 1-i\,\mathrm{sh}2\cdot\sin 1$; f) $\sin 1\,\mathrm{ch}1-i\,\mathrm{sh}1\cos 1$.

3.16. Înlocuim $\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$, $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ în expresiile a) - d). Obținem suma progresiilor geometrice.

a) $\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$; b) $\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cdot\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$;

c) $\dfrac{\sin^2 n\varphi}{\sin\varphi}$; d) $\dfrac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$.

3.17. a) $x_{1,2}=-\frac{1}{13}\pm\frac{5}{13}i$; b) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{2,3}=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$;

c) $x_1=5, x_2=-1, x_{3,4}=2\pm 3i$;

d) $x_{1,2}=\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}i,\ x_{3,4}=\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}i;$

e) $x_{1,2}=\pm i,\ x_{3,4}=\pm 2$; f) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ x_{3,4}=\pm 3i;$

g) $x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_4=3,\ x_{5,6}=-\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i;$

h) $x_1=1,\ x_{2,3}=-\frac{1}{54}\pm i\frac{\sqrt{107}}{54}.$

3.18. a) $16\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x^2+\frac{9}{4}\right)=(2x-3)(2x+3)(4x^2+9);$

b) $\left(4x^2-6\sqrt{2}x+9\right)\left(4x^2+6\sqrt{2}x+9\right);$

c) $(x+2)(x+1)(x^2-2x+4)(x^2-x+1);$

d) $(3x^2+1)(x-1)(x+2);$

e) $(2x-1)(4x^2+2x+1)(x+1)(x^2-x+1);$

f) $(x-1)(x^2+2);$ g) $(x-1)(x-2)(x-3),$

h) $(x-1)(3x+1)(x^2+x+1)(9x^2-3x+1).$

3.19. a) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+3};$ b) $\frac{-2}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+4};$

c) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right);$ d) $\frac{2}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2x-4}{x^2+1};$

e) $\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1};$ f) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{x-11}{6(x^2+1)};$

g) $\frac{1}{x^2+2}+\frac{x-1}{(x^2+2)^2};$ h) $-\frac{1}{x}+\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)};$

i) $-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{3}{x+3};$ j) $-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{2}{x-1}+\frac{9}{2(x+3)}.$

4.1. a) $5x\sqrt[5]{x}+C$; b) $7\ln x+\frac{1}{x^4}+C$; c) $\frac{x^6}{6}+x^5-x+C$;

d) $\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C$; e) $x+6\sqrt{x}+3\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$;

f) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$; g) $2\sqrt{x+3}-2\sqrt{x-3}+C$;

h) $x-\frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{x+2}+C$; i) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot y+C$;

j) $\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\ln\frac{2x-3\sqrt{2}}{2x+3\sqrt{2}}+C$;

k) $\frac{5^x}{\ln 5}-\left(\frac{7}{5}\right)^x\cdot\frac{1}{\ln\frac{7}{5}}+C$; l) e^t-t+C; m) $\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}+C$;

n) $\frac{2^x\cdot 3^{2x}}{\ln 2+2\ln 3}+C$; o) $2\arcsin x-x+C$;

p) $x-\frac{x^3}{3}+arctgx+C\left(\frac{2-x^4}{1+x^2}=\frac{1-x^4}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+\frac{1}{1+x^2}\right)$;

r) $\frac{(5x+7)^{20}}{100}+C$ (să se folosească proprietatea 7);

s) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x^3}\right)+C$, ($\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$, să se folosească proprietatea 6 şi formula 3);

t) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$; u) $\frac{6^x}{\ln 6}-\arcsin\frac{x}{2}+C$.

4.2. a) $tgx-x+C$; b) $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1)+C$, (proprietatea 7 şi formula 8); c) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{24}\sin 12x+C$; d) $\sin x-\cos x+C$;

e) $3tgx+2ctgx+C$; f) $-25x+4\mathrm{tg}x-9\mathrm{ctg}x+C$;

g) $\mathrm{ch}x+\cos x+C$; h) $tgx+C$; i) $\frac{1}{2}ln|sin(2x+1)|+C$,

(proprietatea 7 şi formula 12); j) $\frac{2(\sin x+1)}{\cos x}-x+C$,

($\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$); k) $2x+3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-4\operatorname{tg}x+C$;

l) $x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$; m) $2\cos x+C$; n) $\frac{1}{2}\sin x+C$;

o) $-7\operatorname{ctg}x+3\operatorname{tg}x+C$; p) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$.

4.3. a) $\frac{2}{5}(x-5)^{5/2}+\frac{10}{3}(x-5)^{3/2}+C$; b) $\frac{1}{2}\sin x^2+C$;

c) $\ln\left|(\ln|x|)\right|+C$; d) $\frac{3}{8a}\sqrt[3]{\left(ax^2+b\right)^4}+C$; e) $\sin(\sin x)+C$;

f) $\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt{3x-16}}{4}+C$; g) $-\arcsin\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)+C$;

h) $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C$; i) $e^{\sqrt{2x-1}}+C$;

j) $\frac{1}{10}sh\left(5x^2+3\right)+C$; k) $\frac{1}{48}\ln\left|\frac{2x^4+3}{2x^4-3}\right|+C$;

l) $3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$;

m) $e^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$; n) $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-chx)^3}+C$;

o) $\frac{1}{2}\arcsin(2\ln x)+C$;

p) $\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$ $\left(f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\right)$;

r) $\frac{1}{a}\ln|\operatorname{ch}(ax)|+C$; s) $2\sqrt{\operatorname{tg}x-1}+C$; t) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)+C$;

u) $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x + C$; v) $\operatorname{tg}x - \frac{1}{\cos x} + C$,

$\left(\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\right)$, w) $\operatorname{arctg}(ln|x|) + C$.

4.4. a) $x\sin x + \cos x + C$; b) $\frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)ln|x+1| - \frac{x^2}{2}ln|x| + \frac{x}{2} + C$,

c) $-\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}x + C$; d) $\frac{1}{2}\left(\sin x^2 - x^2\cos x^2\right) + C$;

e) $\frac{1}{2}\left(x^2 + a^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C$; f) $\left(\frac{x^4}{4} - 27x\right)ln|2x| - \frac{x^4}{16} + 27x + C$;

g) $\frac{1}{4}\left[\left(2x^2 - 1\right)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right] + C$;

h) $x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\operatorname{arctg}x + C$; i) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$;

j) $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$; k) $x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \sqrt{1+x^2} + C$;

l) $\frac{4}{41}e^{5x}\left(\sin 4x + \frac{5}{4}\cos 4x\right) + C$;

m) $x\,ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$;

n) $\frac{-\left(9x^2 + 18x - 11\right)}{27}\cos 3x + \frac{2(x+1)}{9}\sin 3x + C$;

o) $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)ln|x| - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + C$;

p) $\frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{2+x^2}{9}\cdot\sqrt{1-x^2} + C$.

4.5. a) $-\frac{1}{3}ln|x+1| + \frac{1}{6}ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$;

b) $2\,ln|x-1| - ln|x| - \frac{x}{(x-1)^2} + C$;

c) $2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C;$

d) $\frac{1}{2}\ln\frac{\left(x^2-2x+5\right)^3}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C;$

e) $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C;$ f) $\frac{1}{3}\left[x^3 + \ln\left|x^3-1\right|\right] + C;$

g) $x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + C;$

h) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + C;$ i) $x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \operatorname{arctg}x + C;$

j) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2-2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C;$

k) $\frac{31}{108}\ln|x-3| + \frac{29}{108}\ln|x+3| + \frac{2}{9}\ln\left|x^2+9\right| - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C;$

l) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1)\right] + C,$

$\left[x^4+4+4x^2-4x^2 = \left(x^2+2\right)^2 - (2x)^2\right];$

m) $x + \frac{9}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C;$ n) $x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C;$

o) $\frac{1}{2}x^2 + 7x - 32\ln|x-3| + 70\ln|x-4| + C;$

p) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + C.$

4.6. a) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C;$ b) $\frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C;$

c) $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C;$

d) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C;$ e) $-\operatorname{ctg}x - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C;$

f) $\frac{1}{5}tg^5x+\frac{1}{3}tg^3x+C$; g) $\frac{1}{2}ln\left|tgx+\sec x\right|+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$;

h) $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$; i) $\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C$;

j) $\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{\mathrm{tg}x+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}x+1+\sqrt{2}}\right|+C$; k) $\frac{2}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+C=\frac{1}{\cos x}+tgx+C$;

l) $ln\left|\sin x\right|-\sin x+C$; m) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$;

n) $\mathrm{arctg}\left(2\sin^2 x-1\right)+C$,

$\left[\frac{\sin 2x}{1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{\sin 2x}{1-2\sin^2 x+2\sin^4 x}=\frac{2\sin 2x}{1+\left(2\sin^2 x-1\right)^2}\right]$;

o) $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C$; p) $-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

r) $\frac{1}{13}e^{2x}\left(2\cos 3x+3\sin 3x\right)+C$; s) $\frac{6}{13}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}-5\cos\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}}+C$;

t) $\frac{x}{2}\left[sin\left(ln\left|x\right|\right)-cos\left(ln\left|x\right|\right)\right]+C$; u) $2\mathrm{tg}^2x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x-\mathrm{ctg}x+C$.

4.7. a) $6\sqrt[6]{x}-12arctg\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$;

b) $ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}}\right|-2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$;

c) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\,ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$;

d) $\frac{3}{20}\sqrt[3]{\left(2x-3\right)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{\left(2x-3\right)^2}+C$; e) $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$;

f) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2+3x}+\sqrt{11}\,ln\left|\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{11}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{11}}\right|+C\right)$;

g) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-9\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+$

$+\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+3arctg\sqrt[3]{x}+C;$

h) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C;$

i) $\sqrt{x^2-1}-arctg\sqrt{x^2-1}+C$; j) $\frac{1}{3}\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C;$

k) $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C;$

l) $\frac{-\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)+C;$

m) $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C$, ($x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ şi formula 18); n) $-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C$, (substituția $x=\frac{1}{t}$ şi formula 18).

4.8. a) $-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{20}\cos 5x+\frac{1}{4}\cos x+C;$

b) $x\operatorname{arctg}x-\frac{3}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$; c) $-\frac{2\ln|x|+1}{4x^2}+C;$

d) $\left(x^2-1\right)\sin 2x+x\cos 2x+C$; e) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C;$

f) $\frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}\right)+C$; g) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+C;$

h) $\frac{1}{2}cos^2 x(1-2\ln|\cos x|)+C$; i) $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C;$

j) $\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}+12\sqrt[6]{x}+24\cdot\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C;$

k) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$, $\left(\frac{2-x}{2+x}=t^3\right)$;

l) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C$;

m) $\text{sh}x+\frac{1}{3}\text{sh}^3x+C$; n) $-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)+x-\ln\left(1+e^x\right)+C$;

o) $\sqrt{1+x^2}\text{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$;

p) $\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x+2)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-2\sqrt[3]{(x+2)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right|-$

$\sqrt{3}arctg\frac{2\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x-1}}+C$ (Indicație: $\sqrt[3]{(x-1)^2\cdot(x+2)}=$

$(x-1)\cdot\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$, și substituția $\frac{x+2}{x-1}=t^3$); r) $-\frac{3}{5}\text{ctg}x\sqrt[3]{\text{ctg}^2x}+C$

(cazul D.5c); s) $\frac{3}{4}\text{tg}x\cdot\sqrt[3]{\text{tg}x}+C$ (cazul D.5c);

t) $2\sqrt{\text{tg}x}\left(\frac{1}{5}\text{tg}^2x+\frac{1}{9}\text{tg}^4x\right)+C$ (cazul D.5c);

u) $2\sqrt{\text{tg}x}\left(\frac{1}{3}\text{tg}x+\frac{2}{7}\text{tg}^3x+\frac{1}{11}\text{tg}^5x\right)+C$ (cazul D.5c).

4.9. a) 5; b) $\frac{19}{15}$; c) 1; d) $\frac{1}{2}\ln 3$; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\frac{\pi}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$;

g) $\frac{1}{3}\left(2-3\text{ch}2+\text{ch}^32\right)$; h) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; i) $\frac{11}{2}+7\ln 2$; j) $\frac{\pi}{4}$;

k) $\frac{\pi}{4}$; l) $\frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}-1\right)$; m) $1\left(\left|1-x\right|=\begin{cases}1-x, x\in[0,1]\\ x-1, x\in[1,2]\end{cases}\right)$;

n) $2\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2x}{2}}=\left|\cos x\right|=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ -\cos x, & x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}\right)$;

o) $-\frac{287}{30}$ (Înmulțim cu conjugata numitorului); p) $2\sqrt{2}$;

r) *0* (*f(x)* este impară pe [*-5, 5*]);

s) *0* (același lucru ca în exemplul precedent); t) 5,25.

4.10. a) $2-2\ln 2$; b) $2\left(\frac{1}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\right)$;

c) $\sqrt{3}-0{,}5\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$; d) $0{,}25\ln 3$ (Indicație: $\sin x-\cos x=t\Rightarrow$

$\Rightarrow(\sin x-\cos x)^2=t^2\Rightarrow 1-\sin 2x=t^2$ etc.);

e) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$ (substituția $x=\cos t$); f) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; g) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$;

h) $\frac{1}{6}$; i) $\frac{81}{16}\pi$ (substituția $x=3\sin t$);

j) $\frac{1}{32}(\pi+2)$ (substituția $x=2\operatorname{tg} t$); k) $\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}$;

l) $\ln 1{,}5$ (substituția $x=\frac{1}{t}$).

4.11. a) Substituția $1-x=t$; b) substituția $a+b-x=t$;

c) *f(x)* este impară; d) substituția $a-x=t$;

e) substituția $x=\pi-t$; f) substituția $x=\frac{\pi}{2}-t$;

g) substituția $x=\pi-t$; h) substituția $\ln x=t$.

4.12. a) $\frac{1}{18}\left(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3\right)$; b) *0* ($y=\operatorname{arctg} x$ - impară);

c) $\frac{\pi^2-8}{32}$; d) $\frac{e^2+1}{4}$; e) $\ln\frac{4}{3}$;

f) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+\sin x}{1+\cos x}=\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\cos^2\frac{x}{2}}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; g) *0*;

h) e^e-e (substituția $e^x=t$); i) *0* (*f(x)* este impară pe [*-3, 3*]);

j) $\frac{2\pi}{3}-\ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; k) *e*; l) *0* (*f(x)* este impară pe $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$).

4.13. a) $\frac{1}{3(e-1)}$; b) 1; c) $\frac{6}{\pi-2}\left(1-\sqrt[3]{\sin 1}\right)$;

d) $\frac{1}{3}(7\ln 7-8\ln 2)-1$; e) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; f) $\sqrt{2}\cdot\pi-4$;

g) $\frac{1}{2}$; h) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{e^2+1}$.

4.14. a) $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$; b) $\frac{x-1}{\ln x}$; c) $\frac{1}{x\sqrt{2x^2+1}}$;

d) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot\ln(x+1)}-\frac{1}{2\ln 3}$; e) $-2xe^{y^2}\cdot\sin^2 x^2$;

f) $\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$; g) $-\frac{1}{36\sqrt{t^5}}$; h) $tg\frac{\pi t^3}{3}$; i) $\frac{t}{\ln t}$; j) $\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{2t}$.

4.15. a) Fie $f(x)=f(-x)$ şi $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ o primitivă a ei.

Observăm că

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=\left|\begin{matrix}t=-z\\dt=-dz\\t\in[0,x]\end{matrix}\right|=-\int_0^x f(-z)dz=-\int_0^x f(t)dt=-F(x).$$

b) Fie $f(x)=-f(-x)$ şi $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ o primitivă a ei.

Observăm că

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=\left|\begin{matrix}t=-z\\dt=-dz\\t\in[0,x]\end{matrix}\right|=-\int_0^x f(-z)dz=\int_0^x f(z)dz=\int_0^x f(t)dt=F(x).$$

Orice primitivă are forma $f(x)+C$ care este pară pentru orice C.

4.16. Se demonstrează că funcţia $\varphi(u)=\int_u^{u+T} f(x)dx$ este constantă. Într-adevăr

$$\varphi'(u)=\left(\int_u^a f(x)dx\right)'_u+\left(\int_a^{u+T} f(x)dx\right)'_u=-f(u)+f(u+T)=0.$$

4.17. a) $\frac{1}{p}$, dacă $p\in]0,+\infty[$ şi $+\infty$, dacă $p\in]+\infty,0]$; b) π;

c) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$; d) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$; e) $\frac{\pi^2}{8}$; f) $+\infty$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{2}{5}$; i) $\ln(2e)$; j) $\frac{1}{2}$;

k) divergentă; l) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; m) 1; n) $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$; o) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$;

p) divergentă; r) $\frac{1}{2}\ln 2$; s) $\frac{1}{4}$; t) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; u) $\frac{\pi}{2}$.

4.18. a) diverge (P7, $k=1$); b) diverge (P7, $k=1$:

$x\to+\infty\Rightarrow x^2+1>e\Rightarrow\ln\left(x^2+1\right)>1\Rightarrow\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}>\frac{1}{x}$);

c) convergentă $\left(\textit{proprietatea } 7,\ k=\frac{3}{2}\right)$; d) convergentă

$\left(\textit{proprietatea } 4, f(x)\le\frac{3}{x^4}\right)$; e) diverge (proprietatea 7, $k=1$);

f) diverge $\left(\textit{proprietatea } 4:\ 2+\cos x>1\Rightarrow\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

g) diverge $\left(\textit{proprietatea } 7, k=\frac{4}{35}\right)$;

h) convergentă $\left(\textit{proprietatea } 5: f(x)=2\sin^2\frac{1}{x}\sim 2\cdot\frac{1}{x^2}\right)$;

i) absolut convergentă

$\left(\textit{proprietatea } 4:\frac{|1-4\sin x|}{x^5+\sqrt[3]{x+1}}<\frac{1+4}{x^5}=\frac{5}{x^5}\right)$;

j) convergentă $\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x} = u \\ \sin x\, dx = dv \\ v = -\cos x \end{array} \right| \Rightarrow \textit{convergentă}\right)$;

k) diverge $\left(f(x) - \frac{3}{2x}\right)$, dacă $x \to +\infty$; l) convergentă $\left(f(x) < \frac{1}{5x^4}\right)$; m) convergentă $\left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^5}}\right)$, dacă $x \to +\infty$; n) diverge $\left(f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\ \textit{dacă}\ \ x \to +\infty\right)$; o) convergentă (proprietatea 7, $k=2$ şi exemplul 1a);

p) diverge $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{x+x} \le \frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

4.19. a) *0*; b) *6*; c) $\frac{3}{2}$; d) π; e) $\frac{\pi}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$; f) diverge; g) diverge; h) $\frac{\pi}{3}$; i) diverge; j) $\frac{9\pi}{2}$; k) $\pi + 2$ $\left(f(x) = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$; l) $\frac{8}{3}$; m) diverge; n) $-\frac{2}{e}$ $\left(\frac{1}{x} = t,\ \ t \in \left[-1,\ -\infty\right[\right)$; o) π; p) diverge.

4.20. a) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\ \ 7^*, k = \frac{1}{3}\right)$;

b) absolut convergentă $\left(\frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

c) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\ \ 7^*, k = \frac{3}{5}\right)$;

d) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\ \ 7^*, k = \frac{1}{3}\right)$;

e) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\quad 7^*, k=\frac{1}{3}\right)$;

f) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\ 7^*, k=\frac{1}{4}\right)$;

g) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\quad 7^*, k=\frac{1}{2}\right)$;

h) absolut convergentă $\left(\textit{proprietatea}\quad 4^*, |f(x)|\le\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

i) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\quad 7^*, k=\frac{1}{4}\right)$;

j) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\quad 7^*, k=\frac{1}{5}\right)$;

k) diverge $\left(\textit{proprietatea}\quad 7^*, k=1\right)$;

l) diverge (*proprietatea* $7^*, k=1$:

$$e^x-\cos x=\left(e^x-1\right)+\left(1-\cos x\right)=\left(e^x-1\right)+2\sin^2\frac{x}{2}\sim x+\frac{x^2}{2});$$

m) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\quad 7^*, k=\frac{1}{2}\right)$;

n) convergentă $\left(\textit{proprietatea}\quad 7^*, k=\frac{1}{2}\right)$.

4.21. π $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=\pi\right)$; **4.22.** $S=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.23. $S_1=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$, $S_2=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=2\int_0^1\frac{dx}{x^2}$.

4.24. 3π $\left(S=\left|\int_0^2\pm\sqrt{\frac{x^3}{2-x}}dx\right|=2\int_0^2 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx\right)$.

4.25. a) $\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}$; b) $\frac{4}{3}$; c) $2\pi-\frac{4}{3}$; d) $\frac{8}{3}$ (ecuația tangentei este $y=-6x+7$); e) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$; f) $0{,}75\pi$; g) $\frac{3}{2}\pi$; h) 27π; i) 6π; j) $\frac{3}{8}\left(5\pi-6\sqrt{3}\right)$; k) $2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$; l) $\frac{3}{2}(\pi+2)$.

4.26. a) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; b) $\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; c) $\ln\frac{\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}$; d) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ (Folosim formula simetrică $L=\int_c^d\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy$); e) 12; f) 8; g) 6; h) $\frac{13}{3}$ $\left(t\in\left[0,\sqrt[4]{8}\right]\right)$; i) $\sqrt{2}(e-1)$; j) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; k) $3+\frac{\ln 2}{2}$

$\left(dL=\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\theta\right)^2}\,d\theta=\sqrt{\rho^2\cdot d\theta^2+d\rho^2}=\sqrt{\rho^2\cdot\left(\theta'_\rho\right)^2+1}\,d\rho\right)$.

4.27. a) $S_{ox}=\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi, V_{ox}=\frac{256}{63}\pi$;

b) $S_{oy}=4\pi(\operatorname{sh}2+2), V_{oy}=4\pi(2+\operatorname{sh}2)$; c) $S_{ox}=\frac{62\pi}{3}, V_{oy}=18\pi$;

d) $S_{oy}=\int_{y_1}^{y_2}x(y)\cdot\sqrt{1+\left(x'\right)^2}\,dy=\int_0^2 e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy=$

$\frac{1}{2}\left[e^2\sqrt{e^4+1}+\ln\left(e^2+\sqrt{e^4+1}\right)-\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$,

$V_{oy}=\frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right)$ $\left(V_{OY}=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2(y)dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy\right)$;

e) $S_{ox}=2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right], V_{ox}=\frac{\pi^2}{2}$;

f) $S_{ox}=\frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right), V_{ox}=8\pi$; g) $S_{oy}=4\pi R^2, V_{oy}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

4.28. a) $0{,}3\pi$; b) $97{,}2\pi$; c) $\frac{9\pi}{4\ln 2}$; d) $39{,}6\pi$; e) $\frac{64\pi}{3}$;

f) $\frac{32}{105}\pi a^2$; g) $\pi\left[\frac{15}{2}-8\ln 2\right]$.

4.29. a) 40π; b) $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}\left(S(z)=\pi ab=\pi\sqrt{6}(z-2)^2, z\in[0,2]\right)$;

c) $\frac{32}{3}a\left(S(y)=\int_{-2}^{2} z\,dy=\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)dy\right)$;

d) $18\sqrt{3}$ (Se consideră secţiunile cu plane paralele planului *YOZ*, care reprezintă triunghiuri dreptunghice. Cateta din planul orizontal este egală cu ordonata $y=\sqrt{R^2-x^2}$, iar cateta a doua z este egală cu $y\cdot \mathrm{tg}\alpha=\sqrt{3}y$. Deci $S(x)=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\cdot\sqrt{3}$ şi $V=\int_{-R}^{R} S(x)dx$);

e) $\frac{4}{3}\pi R^3$ (se consideră secţiunile paralele cu planul $z=0$. Ele reprezintă cercuri cu aria $S(h)=\pi\left(R^2-h^2\right)$, $h\in[-R,R]$;

f) $\frac{3\pi\sqrt{6}}{4}$ (se consideră secţiunile paralele cu planul *XOY*, care reprezintă domenii mărginite de elipse. Pentru $z=3$ avem elipsa $x^2+6y^2=3$ cu $S_1=\pi\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$. Notăm $S(h)$ - aria secţiunii cu planul $z=h$ $(0\le h\le 3)$. Avem $\frac{x^2}{h}+\frac{y^2}{h/6}=1$ cu $S(h)=\pi\cdot\sqrt{h}\cdot\sqrt{\frac{h}{6}}=\frac{\pi h}{\sqrt{6}}$).

4.30. a) $F_p=\frac{2}{3}r^3=180(kN)$ $\left(dF=ydS=2y\sqrt{r^2-y^2}dy\right)$;

b) $F_p=\frac{1}{3}bh^2gh=160(kN)$ $\left(dF=gp\frac{by^2}{h}dy\right)$;

c) $14700(kN)$ $\left(dF=pg\cdot\frac{20}{21}(21-y)y\,dy\right)$.

4.31. *0,125*.

4.32. *5* (kJ) $\left[\frac{F}{mg}=\frac{R^2}{h^2}\Rightarrow F=\frac{mgR^2}{h^2}\Rightarrow A=\int\limits_R^{R+h}F\cdot dh,\ \text{unde R - raza Pământului}\right]$.

4.33. *60* (m).

4.34. *6* (s) $\left[v=v_0+gt, S=\int\limits_0^t v(t)dt=\int\limits_0^t(v_0+gt)dt\right]$.

4.35. *16* (m) $\left[y=\int\limits_2^6 v\cdot dt\right]$.

4.36. a) $\frac{38}{3}$; b) *6*; c) $\frac{1}{8}\left(4+e^2-e^{-2}\right)=\frac{1}{4}(2+\text{sh}2)$; d) $\frac{21}{8}$.

4.37. a) $M_{ox}=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$, $M_{oy}=\frac{9}{8}\sqrt{5}+\frac{1}{16}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$;

b) $M_{ox}=\frac{15}{2}$, $M_{oy}=10$;

c) $M_{ox}=1+\text{sh}1$, $M_{oy}=2\left(\text{sh}\frac{1}{2}-2\text{ch}\frac{1}{2}+2\right)$; d) $M_{ox}=M_{oy}=15$.

4.38. a) $I_{ox}=4\pi$; b) $I_{ox}=\frac{4}{3}\text{sh}1(\text{ch}2+5)=\frac{8}{3}\text{sh}1\left(3+\text{sh}^2 1\right)$;

c) $I_{ox}=460{,}8$; d) $I_{ox}=\frac{1}{3}\left[\sqrt{\left(1+e^2\right)^3}-\sqrt{8}\right]$.

4.39. a) $x_c=0, y_c=2$ (linia este simetrică față de OY, deci centrul de greutate se află pe această axă, adică $x_c=0$);

b) $x_c=\frac{3\left(\text{sh}1-\text{ch}1+1\right)}{\text{sh}1}=3\left(1+\text{th}\frac{1}{2}\right)$, $y_c=\frac{3\left(2+\text{sh}2\right)}{4\text{sh}1}=\frac{3}{2}\left(\text{ch}1+\frac{1}{\text{sh}1}\right)$;

c) $x_c=6\pi, y_c=8$; d) $x_c=0, y_c=4$ (linia este simetrică față de axa OY);

e) $x_c=y_c=4$ (să se treacă la forma parametrică a cardioidei $x=\rho\cos\theta=5(1+\cos\theta)\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta=5(1+\cos\theta)\sin\theta, \theta\in[0,\pi]$).

4.40. a) $\frac{64}{3}$; b) $2(\text{ch}1-1)$; c) $a^2\ln 2$; d) $\frac{4}{3}$.

4.41. a) $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$; b) $0,15$; c) $\frac{1}{24}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$; d) $\frac{1}{3}ab^2$.

4.42. a) 2; b) $6,4$; c) $\frac{3}{2}\pi$; $162(3\operatorname{sh}1-2\operatorname{ch}1)$.

4.43. a) $x_c=\frac{1}{2}(\pi-2)$, $y_c=\frac{\pi}{8}$; b) $x_c=1$, $y_c=0,4$;

c) $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{5}{6}a$; d) $x_c=\frac{9}{14}$, $y_c=1,2$.

4.44. $S_1=\frac{4}{3}\left(\sqrt{3}+4\pi\right)$, $S_2=\frac{4}{3}\left(8\pi-\sqrt{3}\right)$.

4.45. $S_1=S_2=\pi-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3$, $S_3=2\left(\pi-S_1\right)$.

4.46. $V_{ox}=\frac{2\pi}{5}$, $V_{oy}=\frac{16\pi}{35}$. **4.47.** $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$.

4.48. $S_1=3\pi$, $V_{ox}=\frac{3\pi}{4}$.

4.49. $0,785\cdot 10^5\,(\text{kGm})$ $\left[A=\int_0^R \gamma g\pi\left(R^2-x^2\right)x\,dx\right]$.

4.50. $\frac{1}{2}\pi R^2\gamma g H^2$ $\left(A=\int_0^H \gamma g\pi R^2 x\,dx\right)$.

4.51. $x_c=-\frac{e^{\pi}-2e^{2\pi}}{5\left(e^{\pi}-e^{\pi/2}\right)}a$, $y_c=\frac{a\left(e^{2\pi}-2e^{\pi}\right)}{5\left(e^{\pi}-e^{\pi/2}\right)}$.

4.52. $x_c=\frac{25}{4}$, $y_c=0$.

4.53. $L_{el}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+2\cos^2 t}\,dt=$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=L_{\sin}$.

4.54. $2(e-1)$ $\left[f(t)=e^t=f''(t)\right]$.

4.55. $\frac{\pi^2}{2}$ $\left(V_{ox}=2V_1=2\pi\int_0^{+\infty}y^2dx\right)$.

Capitolul 5

5.1. a) Exteriorul circumferinţei $x^2+y^2=R^2$ şi punctele ei; b) cercul deschis $x^2+y^2<R^2$;

c) planul XOY cu excepţia punctelor ce aparţin primei bisectoare $(y=x)$;

d) partea de sus a semiplanului XOY faţă de dreapta $y=x$ cu excepţia punctelor ei;

e) domeniul mărginit de circumferinţele $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+(y-1)^2=1$ cu excepţia părţii lor comune. Punctele primei circumferinţe aparţin domeniului;

f) discul $0<x^2+y^2\le 1$, dacă $0<a<1$ sau exteriorul cercului de raza 1 cu centrul în origine, dacă $a>1$;

g) coroana închisă $9\le x^2+y^2\le 16$;

h) fâşia planului XOY cuprinsă între parabolele $x=y^2$, $x=-y^2$ şi dreptele $y=0$, $y=2$. Originea sistemului XOY nu aparţine domeniului dat;

i) planul XOY; j) coroana închisă $4\le x^2+y^2\le 6$;

k) domeniul închis cuprins între coroana $2\le x^2+y^2\le 4$ şi hiperbolele $xy=\pm 1$;

l) domeniul cuprins între bisectoarele $y=\pm x$, situat în cadranele 1 şi 3. Punctele de pe aceste bisectoare nu aparţin domeniului;

m) domeniul format de punctele cadranului 1 situat mai sus de hiperbola $xy=1$. Punctele de pe hiperbola $xy=1$ aparţin domeniului;

n) circumferinţa $x^2+y^2=R^2$;

o) domeniul alcătuit din cercul închis $x^2+y^2\le 1$ şi coroanele $2n\le x^2+y^2\le 2n+1$, $n\in N$;

p) cadranul 1. Punctele de pe axa OY nu aparţin domeniului, iar de pe axa OX aparţin lui;

r) porţiunea de plan cuprinsă în cadranul 1, mărginită de parabola $y=x^2$ şi semiaxa pozitivă a axei OX. Punctele de pe semiaxa OX şi parabola $y=x^2$ aparţin domeniului;

s) spaţiul $OXYZ$ cu excepţia punctelor de pe paraboloidul de rotaţie $z=x^2+y^2$;

t) corpul mărginit de sfera $x^2+y^2+z^2 \le R^2$;

u) punctele de pe suprafaţa conică $x^2+y^2-z^2=0$ şi punctele din interiorul ei.

5.2. a) $\frac{1}{2}$; b) *0*; c) *e*; d) nu există; e) *1*; f) *0*; g) nu există; h) *1*; i) *0*; j) ∞; k) *0*; l) *-6*; m) *0*; n) nu există; o) $-\frac{1}{4}$; p) $-\frac{1}{3}$.

5.3. a) Continuă pe planul XOY;

b) continuă pe planul XOY;

c) continuă pe planul XOY cu excepţia punctului (0, 0).

5.4. a) punctele de pe parabola $y^2=2x-1$;

b) punctele de pe circumferinţa $x^2+y^2=4$;

c) punctele de pe axele de coordonate;

d) punctele de pe suprafaţa conică $x^2+y^2-z^2=0$;

e) punctele $(m,n), n, m \in Z$;

f) punctele de pe planele de coordonate;

g) punctele de pe bisectoarea $y=-x$ şi parabola $x=y^2$;

h) punctele de pe hiperboloidul cu o pânză $x^2+y^2-z^2=1$;

i) punctele din exteriorul cercului $x^2+y^2 \le 1$;

j) punctele de pe hiperboloidul cu două pânze $-x^2-y^2+z^2=1$;

k) punctele de pe hiperbola echilaterală $x^2-y^2=1$ şi punctele de pe circumferinţa $x^2+y^2=1$;

l) punctele de pe elipsoidul triaxial $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ cu $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{2}, c^2=\frac{1}{3}$.

5.5. a) $z'_x = 2x+6xy+4$, $z'_y = 4y+3x^2+5$;

b) $z'_x = 2x\sin^4 y$, $z'_y = 4x^4 \sin^3 y \cos y = 2x^4 \sin^2 y \sin 2y$;

c) $z'_x = \frac{2xy-1}{y^2} + \frac{2}{\cos^2 2y}$, $z'_y = \frac{x(y-2x)}{x^3} - \sin 2y$;

d) $z'_x = -\frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2 + y^2}$;

e) $z'_x = 6x^2\left(x^3+y^2\right)\cdot e^{\left(x^3+y^2\right)^2}$, $z'_y = 4y\left(x^3+y^2\right)\cdot e^{\left(x^3+y^2\right)^2}$;

f) $u'_x = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $u'_y = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}$, $u'_z = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$;

g) $u'_x = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$, $u'_y = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + \frac{z}{y^2}e^{-\frac{z}{y}}$, $u'_z = -\frac{1}{y}e^{-\frac{z}{y}}$;

h) $u'_x = \frac{y}{x^2}e^{xyz}\left(x^2 z\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{y}{x}\right)$, $u'_y = \frac{1}{x}e^{xyz}\left(x^2 z\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)$,

$u'_z = e^{xyz}\cdot\sin\frac{y}{x}\cdot xy$;

i) $u'_x = 3\cos(3x+5y-4z)$, $u'_y = 5\cos(3x+5y-4z)$,

$u'_z = -4\cos(3x+5y-4z)$;

j) $z'_x = \sin y\cdot x^{\sin y-1}$, $z'_y = x^{\sin y}\cdot\cos y\cdot\ln|x|$,

k) $z'_x = -e^{arctg\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y = e^{arctg\frac{y}{x}}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$;

l) $z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$, (observăm că

$z = \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2}{y^2} = 2\left[\ln\left|\sqrt{x^2-y^2}-x\right| - \ln|y|\right]$);

m) $z'_x = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$, $z'_y = -\frac{y^2}{\sqrt{x^4-y^4}}$; n) $u'_x = yz(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x$,

$u'_y = z(\sin x)^{yz}\cdot\ln|\sin x|$, $u'_z = y(\sin x)^{yz}\cdot\ln|\sin x|$.

5.6. a) $dz = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$; b) $dz = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$;

c) $du = \dfrac{3dx}{\cos^2(3x-y)} + \left(6^{y+z}\cdot \ln 6 - \dfrac{1}{\cos^2(3x-y)}\right)dy + 6^{y+z}\cdot \ln 6\cdot dz;$

d) $dz = \dfrac{2(xdy - ydx)}{x^2 \sin\left(\dfrac{2y}{x}\right)};$

e) $dz = e^{x+y}\left[\left((x+1)\cos y + y(\sin x + \cos x)\right)dx + \right.$

$\left. + x(\cos y - \sin y) + (y+1)\sin x dy\right];$

f) $dz = \dfrac{2dx}{x^2+4} + \dfrac{2\cos y dy}{\sin^2 y + 4}$; g) $du = e^{xyz}(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz);$

h) $dz = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot dy;$

i) $dz = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}(y\,dx + x\,dy) + e^{x+y}(dx+dy);$

j) $du = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$

5.7. a) $z'_x = 2u\left(\dfrac{ux}{v} - \dfrac{y\ln|v|}{x^2}\right),\ z'_y = 2u\left(\dfrac{\ln|v|}{x} - \dfrac{u\cdot y}{v}\right);$

b) $z'_x = (2uv - v^2)\sin y - (u^2 - 2uv)\cdot y\sin x,$

$z'_y = (2uv - v^2)x\cos y + (u^2 - 2uv)\cdot\cos x;$

c) $z'_x = 2x\cdot f'_v(u,v) - \dfrac{2y}{(x+y)^2}\cdot f'_u(u,v),$

$z'_y = \dfrac{2x}{(x+y)^2}\cdot f'_u(u,v) - 3f'_v(u,v);$

d) $z'_x = \dfrac{2x}{x^2-y^2}\cdot f'_u(u,v) + y^2\cdot f'_v(u,v),$

$z'_y = 2xy\cdot f'_v(u,v) - \dfrac{2y}{x^2-y^2}\cdot f'_u(u,v);$

e) $z'_x = \dfrac{2(uy^2+v)}{y^2(u^2+v^2)},\ z'_y = \dfrac{2x(y^2u - v)}{y^2(u^2+v^2)}.$

f) $z'_x = e^{u-2v}\left(\cos x - 6x^2\right)$, $z'_y = e^{u-2v}(-4y)$;

5.8. a) $\cos u \cdot \cos v \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \sin u \cdot \sin v \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\frac{2x(3x+2)}{\left(x^2+3x+1\right)^2}$; c) $\frac{6}{\sin 2x}$; d) $\frac{2e^{2x}(u-v)}{u^2+v^2}$; e) $\frac{e^x + e^y\left(x^2+1\right)}{e^x+e^y}$;

f) $\frac{dz}{dx} = 1$, dacă $2\pi k - \frac{\pi}{2} < x+\alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ şi $\frac{dz}{dx} = -1$, dacă $2\pi k + \frac{\pi}{2} < x+\alpha < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$; g) $\frac{1-\sin 2x}{x - \sin^2 x}$;

h) $e^{ax} \cdot \sin x$; i) $\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$; j) $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \cdot \sin x$.

5.9. a) $y'_x = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$; b) $y'_x = \frac{yx^{y-1} - y^x \cdot \ln|y|}{xy^{x-1} - x^y \cdot \ln|x|}$;

c) $y'_x = \frac{y\left[\cos(xy) - e^{xy} - 2x\right]}{x\left[x + e^{xy} - \cos(xy)\right]}$; d) $y'_x = \frac{x+y}{x-y}$; e) $y'_x = \frac{y}{2x}$;

f) $y'_x = \frac{y}{x}$; g) $z'_x = \frac{\cos^2 2z}{2y}$, $z'_y = -\frac{\sin 4z}{4y}$; h) $z'_x = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy}$, $z'_y = \frac{xz - y^2}{z^2 - xy}$; i) $z'_x = \frac{1}{1 + \ln\left|\frac{z}{y}\right|}$, $z'_y = \frac{z}{y\left(1 + \ln\left|\frac{z}{y}\right|\right)}$;

j) $z'_x = -\left[(z+y)\operatorname{ctg} x + \frac{\sin y}{\sin x}\right]$, $z'_y = -\frac{x\cos y + \sin x}{\sin x}$; k) $z'_x = 1$, $z'_y = \frac{z-x}{y + y^2 + (z-x)^2}$; l) $z'_x = -\left(y + z + e^{y-x}\right)$, $z'_y = -\left(1 + x \cdot e^{y-z}\right)$.

5.10. a) *1,013*; b) *3,037*; c) *0,227*; d) *0,75*; e) *1,05* (se consideră funcţia $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ şi punctul $M_0(1, 2, 1)$); f) *0,005*; g) *108,972* (se consideră funcţia $u = xz^2y^3$ în punctul $M_0(1, 2, 3)$); h) *1,08*,

5.11. a) $-\sin(x+y)$; b) 0; c) $\dfrac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$; d) $e^{xy}(1+xy)$;

e) $(1-x^2y^2z^2)\cos(xyz)-3xyz\sin(xyz)$;

f) $2y^2dx^2+8xy\,dx\,dy+2x^2dy^2$;

g) $-\cos(x+2y^2)dx^2-8y\cos(x+2y^2)dx\,dy-$

$-4\left[\sin(x+2y^2)+4y^2\cos(x+2y^2)\right]dy^2$; h) $-\dfrac{y}{x^2}dx^2+\dfrac{2}{x}dx\,dy$;

i) $e^{ax+by}(adx+bdy)^2$;

j) $\left(e^x\ln y-\dfrac{\sin y}{x^2}\right)dx^2+2\left(\dfrac{e^x}{y}+\dfrac{\cos y}{x}\right)dx\,dy-\left(\dfrac{e^x}{y^2}+\sin y\ln x\right)dy^2$;

k) $(12x^2+4y^2)dx^2+16xy\,dx\,dy+(4x^2+12y^2)dy^2$;

l) $\left(e^{x-y^2}-\cos x\right)dx^2-4ye^{x-y^2}dx\,dy+2\cdot e^{x-y^2}(2y^2-1)dy^2$.

5.13. a) $4x+2y-z-3=0, \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$;

b) $2x-z-2=0, \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-1}$;

c) $x-2y+z=0, \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$; d) $y=2, \dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{0}$;

e) $15x+10y-6z-30=0, \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2/3}=\dfrac{z-5}{-2/5}$;

f) $x-y-2z+1=0, \quad \dfrac{x-\pi/4}{1}=\dfrac{y-\pi/4}{-1}=\dfrac{z-1/2}{-2}$;

g) $2x+2y-3z+1=0, \quad \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$;

h) $5x+y-z-3=0, \quad \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$;

i) $x-6y+9z-16=0, \quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z-3}{9}$.

5.14. a) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}\Rightarrow$

$\frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{\sqrt{z_0}}=0 \Rightarrow x_1=\sqrt{x_0}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=\sqrt{ax_0}$,

$y_1=\sqrt{ay_0}$, $z_1=\sqrt{az_0}$ şi $x_1+y_1+z_1=a$.

b) similar punctului precedent: $x_1=\sqrt[3]{a^2x_0}$, $y_1=\sqrt[3]{a^2y_0}$, $z_1=\sqrt[3]{a^2z_0}$.

5.15. $M_0\left(\pm\sqrt{6},\pm\frac{1}{2}\sqrt{6},\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$;

5.16. a) $M_0\left(\pm\frac{4}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$; b) $\left(\pm\frac{4}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$. **5.17.** *5*.

5.18. *9,4*. **5.20.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.21.** $\frac{68}{3}$. **5.22.** $\frac{\sqrt{73}}{8}$.

5.23. $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. **5.24.** $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **5.25.** $-\frac{1}{2}$.

5.27. a) $z=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\ldots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n$;

b) $z=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$ cu $R_n=0$ pentru $n\geq 3$, $n\in N$;

c) $z=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$ cu $R_n=0$ pentru $n\geq 3$, $n\in N$;

d) $z=12+15(x-2)+6(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-6(z-1)^2+$ $+(x-2)^3-2(z-1)^3$ cu $R_n=0$ pentru $n\geq 3$, $n\in N$;

5.28. $z=y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+R_3$.

5.29. $z=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2+R_4$.

5.30. $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2\cdot(y-1)^2+R_3$.

5.31. $z=1-(x-1)+(y-1)+(x-1)^2-(x-1)(y-1)-$ $-(x-1)^3+(x-1)^2(y-1)+R_3$.

5.32. $z = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(y-1)^2 + R_2$.

5.33. a) $z_{min} = f(0,3) = -9$; b) nu are extreme;

c) $z_{max} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$ (Avem următoarele puncte staţionare $(x, 0)$, $x \in R$; $(0, 1)$; $\left(1/4, 1/2\right)$; d) $z_{min} = f(6,6) = -2$; e) nu are extreme; f) $z_{min} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$; g) $z_{min} = f(2,1) = -28$,

$z_{max} = f(-2,-1) = 28$; h) $z_{min} f(0,0) = 0$; i) $z_{min} = f(0,0) = 0$,

$z_{max} = f(\pm 1,0) = 2 \cdot e^{-1}$; j) $z_{min} = f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -8$

[$\Delta z(0,0) = 2x^4 > 0$, pentru $x = y \to 0$ şi

$\Delta z(0,0) = -x^2(2 - x^2) < 0$, pentru $y=0$ şi $x \to 0$];

k) $z_{max} = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

$z_{min} = f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = -1$; l) $z_{min} = f(5,6) = -86$;

m) $z_{max} = f(1,1) = -\frac{2}{3}$; n) nu are extreme;

o) $z_{min} = f(-4,1) = -1$; p) $z_{min} = f\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0$.

5.34. a) $u_{min} = f(1,-1,1) = -2$; b) $u_{min} = f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{4}{3}$;

c) $u_{min} = f(2,-3,1) = -14$; d) $u_{min} = f\left(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}\right) = 4\sqrt[4]{2}$,

$u_{max} = f\left(-\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}\right) = -4\sqrt[4]{2}$; e) $u_{min} = f(-1,-2,3) = -14$;

f) $u_{min} = f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$, $u_{max} = f\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right) = -4$;

g) $u_{min} = f(2.4.8) = 2$, $u_{max} = f(-2,4,-8) = -2$; h) nu are extreme; i) $u_{min} = f(24, -144, -1) = -6913$, $d^2U(0, 0, -1)$

primeşte atât valori pozitive, cât şi valori negative pentru dx, dy, dz; j) $u_{\min} = f(-1,0,0) = -e^{-1}$.

5.35. a) $z_{\min} = f\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}$; b) $z_{max} = f(-2,-2) = 20$, $z_{\min} = f(2,2) = -4$; c) $z_{\max} = f(1,2) = 5$, $z_{\min} = f(-1,-2) = -5$;

d) $z_{\min} = f(-2,4) = -12$; e) $z_{\min} = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$;

f) $z_{\min} = f\left(\frac{48}{25},\frac{36}{25}\right) = \frac{144}{25}$; g) $z_{\min} = f(1,0) = 0$;

h) $z_{\max} = f\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$; i) $z_{\min} = f\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$;

j) $z_{min} = f(1,\ 0) = 0$; $z_{\max} = f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

5.36. a) $u_{\max} = f(1,-2,2) = 9$, $u_{\min} = f(-1,2,-2) = -9$;

b) $u_{\max} = f(0,0,\pm 4) = 16$, $u_{\min} = f(0,\pm 1,0) = 1$;

c) $u_{\max} = f\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right) = 12$, $u_{\min} = f\left(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right) = -12$;

d) $u_{\min} = f(-4,-2,4) = -18$, $u_{\max} = f(4,2,-4) = 18$,

e) $u_{\min} = f(0,0,\pm 2) = 4$, $u_{\max} = f(\pm 4,0,0) = 16$, punctele $(0,\pm 3,0)$ nu sunt puncte extreme; f) $u_{min} = f(2,2,2) = 64$.

5.37. a) $\operatorname{Sup}_D f(x,y) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 2+\sqrt{13}$,

$\operatorname{Inf}_D f(x,y) = f\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 2-\sqrt{13}$;

b) $\operatorname{Sup}_D f(x,y) = f(-3,4) = 125$, $\operatorname{Inf}_D f(x,y) = f(3,-4) = -75$;

c) $\operatorname{Sup}_D f(x,y) = f(0,0) = 0$, $\operatorname{Inf}_D f(x,y) = f(3,0) = -9$;

d) $\operatorname{Sup}_D f(x,y) = f(1,2) = 9$, $\operatorname{Inf}_D f(x,y) = f(3,-2) = -11$;

e) $\operatorname{Sup}_D f(x,y) = f(0,-5) = 41$, $\operatorname{Inf}_D f(x,y) = f(-2,-1) = -3$;

f) $\text{Sup}_D f(x,y) = f\left(2, \frac{1}{2}\right) = 3{,}5$, $\text{Inf}_D f(x,y) = f\left(2, -\frac{3}{2}\right) = -4{,}5$;

g) $\text{Sup}_D f(x,y) = f(1{,}2) = 17$, $\text{Inf}_D f(x,y) = f(1{,}0) = -3$;

h) $\text{Sup}_D f(x,y) = f(2{,}1) = 4$, $\text{Inf}_D f(x,y) = f(4{,}2) = -64$;

i) $\text{Sup}_D f(x,y) = f(0, \pm 1) = \frac{3}{e}$, $\text{Inf}_D f(x,y) = f(0{,}0) = 0$;

j) $\text{Sup}_D f(x,y) = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\text{Inf}_D f(x,y) = f(0{,}0) = 0$;

k) $\text{Sup}_D f(x,y) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$,

$\text{Inf}_D f(x,y) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$;

l) $Sup_D z = z\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 25$, $Inf_D z = z(0,\ 0) = 0$.

5.38. Pătratul $p = 4\sqrt{S}$.

5.39. Triunghiul echilateral ($S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$ $\Rightarrow S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ cu $z = 2p - x - y$).

5.40. Cubul $V_{\max} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}$.

5.41. $z_{min} = \sqrt{\left(\sqrt{2S}\right)^2 + \left(\sqrt{2S}\right)^2} = 2\sqrt{S}$.

5.42. $x = y = \frac{2\sqrt{2}}{3}R, h = \frac{H}{3}\left(V = xyh = xy \cdot \frac{H}{2R}\left(2R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)$.

5.43. $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \sqrt[4]{m}$.

5.44. Lungimea şi lăţimea sunt egale cu $\frac{2}{3}\sqrt{3}R$, iar înălţimea este $\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

5.45. $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{3}$.

5.46. $x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$, $y = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + ... + b_n)$,

$z = \frac{1}{n}(c_1 + c_2 + ... + c_n)$ $\left(f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + (y-c_i)^2 \right)$

5.47. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ $\left(S = x^2 + y^2 + \left(\frac{x+2y-16}{\sqrt{5}}\right)^2 = \right.$

$= \frac{1}{5}(6x^2 + 9y^2 + 4xy - 32x - 64y + 256)$.

5.48. $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 3$ $\left[V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}abc\right) = \frac{1}{6}abc, \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \right.$

$\Rightarrow \frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 1 \Rightarrow c = \frac{p \cdot ab}{ab - mb - na} \Rightarrow V = \frac{p}{6} \cdot \frac{a^2b^2}{ab - mb - na} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_a', V_b', V_c'$, etc. $a=3m$, $b=3n$, $c=3p$].

5.49. $R=1$, $H=2$ $\left[V = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot \frac{3 - R^2}{R} = \pi R(3 - R^2) \right]$.

5.50. Cubul cu latura $a=2$

$\left(V = xyz = xy\sqrt{12 - x^2 - y^2} \Rightarrow (2,2,2) \right.$ este punct de max).

5.51. $M_0(1, 2)$ $\left[d = \frac{|x - y + 4|}{\sqrt{2}} \right.$ cu condiția $4x - y^2 = 0$.

Funcția $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + 4)$ are min condițional în punctul $(1, 2)$, iar funcția $d = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + 4)$ are max condițional în punctul $(1, 2)$].

5.52. $S = 2ab$ $S = 2x \cdot 2y = 4xy = 4a\cos t \cdot b\sin t = 2ab\sin 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t' = 4ab\cos 2t \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{4}, S''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$).

ANEXĂ

Lucrarea de control nr. 1[*)]

Algebră şi geometrie analitică

Problema 1. Să se calculeze soluţia sistemului de ecuaţii cu ajutorul metodelor Cramer şi matricială. Să se verifice matricea inversă A^{-1}, calculând AA^{-1} şi $A^{-1}A$, unde A este matricea sistemului.

1. $\begin{cases} x+2y+z=-4, \\ 2x-3y-2z=0, \\ 3x+y-z=4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+8y+z=8, \\ x+2y+3z=1, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y+4z=0, \\ 3x+2y-z=-1, \\ 5x-3y+7z=5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x-3y-2z=0, \\ 3x+y-z=4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-3y+5z=-8, \\ 2x+4y+3z=-4, \\ 3x-y+3z=10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+y+5z=4, \\ 5x+2y+13z=-23, \\ 3x+z+5=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 2x+y+2z=6, \\ x+y+5z=-1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+z=11. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+3y-5z=1, \\ 3x+y+2z=-4, \\ x+2y+z=5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x+3y+2z=9, \\ 2x+5y+3z=4, \\ 5x+6y+2z=18. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 4x-3y+z=4, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x+5y+3z=1, \\ 2x+7y+z=8. \end{cases}$

---

*) Această lucrare este inclusă pentru a acoperi în întregime programa cursului "Matematică superioară".

13. $\begin{cases} 7x+5y=31, \\ 4x+14z=-43, \\ 2x+3y+14z=-20. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x+8y+z=7, \\ 2x+3y+2z=9, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-4, \\ 3x+y+z=3, \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-y-3z=-4, \\ x+5y-z=7. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+3y+z=10, \\ x-2y-z=7. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=14, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x+4y-z=6, \\ x-3y+z=-2, \\ x-y-4z=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x+2y+5z=7, \\ 7x+4y+8z=3, \\ 5x-3y-4z=-12. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x+y+z=4, \\ x+y+2z=1, \\ 4x+y+z=5. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+2y-z=14, \\ x-3y-z=4, \\ 7x+2y=9. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x+2y+z=14, \\ x+3y+z=4, \\ 6x+5y+3z=8. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x+4y+3z=-1, \\ x+5y+z=10. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x+8y-z=17, \\ 2x-3y+2z=19, \\ x+2y+3z=4. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x+3y+2z=9, \\ x+7y+z=3, \\ 6x+y+4z=-2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x+3y-5z=15, \\ 2x+5y-7z=10, \\ x+y-2z=12. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+2y+2z=1, \\ 2x+y+z=2, \\ 3x+5y+z=-9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x+y+2z=-10, \\ 2x-y+2z=-41, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x+2y+2z=3, \\ 2x-y+z=1, \\ 4x+3y+3z=5. \end{cases}$

Problema 2. Să se stabilească compatibilitatea sistemului de ecuații și să se rezolve acest sistem cu ajutorul metodei lui Gauss.

1. $\begin{cases} x-3z+2y=5, \\ x+2y-3z=-3, \\ 4x+2y+z=11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-4x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=4, \\ 4x_1-x_2+4x_3-9x_4=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+y+z=-21, \\ x-4y+2z=-16, \\ 3x-5y-6z=41. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3+x_4=4, \\ 5x_1-8x_2-2x_3+8x_4=13, \\ -2x_1-x_2+x_3-x_4=-1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x-5y=17, \\ 4x+11z=-40, \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1-5x_2+10x_3-x_4=-10, \\ 3x_1+x_2+7x_3+x_4=-2, \\ x_1+7x_2+4x_3+3x_4=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+y+z=21, \\ x-4y-2z=-16, \\ 3x-5y-6z=41. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3-x_4=6, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=4, \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20, \\ 3x-2y=31. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4=-1, \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-4x_4=-4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x-5y=31, \\ 4x+11y+43z=0, \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=-2, \\ 3x_1-5x_2+x_3+x_4=-2, \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4=-6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+6x_4=7, \\ 2x_1+5x_2+x_3-2x_4=4, \\ x_1+7x_2-10x_3+20x_4=17. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-3y-z=1, \\ 3x+y-2z=-4, \\ x-2y+z=5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-5, \\ x_1+x_2-x_3+5x_4=1, \\ 5x_1-3x_2+2x_3-x_4=-8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=1, \\ x_1-2x_2+4x_3-x_4=-3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=4, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+x_3-4x_4=5. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1+2x_2+3x_3+x_4=5, \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=-1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x-y-3z=13, \\ 3x-2y+4z=-15. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4=1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+3y-2z=3, \\ 2x-y-2z=4, \\ 2x-4y-2z=4. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3-3x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+28x_4=1, \\ -3x_1+8x_2-23x_3+5x_4=3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x-3y-z=-11, \\ x+5y-3z=-5, \\ 2x-3y+z=-5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=3, \\ 4x_1-x_2+5x_3-2x_4=6. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x+6y+z=2, \\ x+5y+3z=-3, \\ 2x+4y-z=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 6x_1+2x_2-5x_3+x_4=0, \\ 5x_1+x_2-3x_3+x_4=4, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=-3. \end{cases}$

Problema 3. Să se calculeze soluția generală a sistemului de ecuații liniare omogene. Să se afle sistemul fundamental de soluții și să se exprime soluția generală prin acest sistem.

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \\ x_1-3x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=0 \\ x_1-5x_2+3x_3+10x_4=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+6x_3+8x_4=0 \\ -3x_1+2x_2+x_3+4x_4=0 \\ -7x_2+7x_3+12x_4=0 \\ 3x_1+12x_2+13x_3+20x_4=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1-4x_2+3x_3+x_4=0 \\ 3x_1-3x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 4x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+9x_2+4x_3-10x_4=0 \\ 3x_1-7x_2+3x_3-7x_4=0 \\ 4x_1-5x_2-2x_3+4x_4=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+5x_3+7x_4=0 \\ 5x_1+3x_2+5x_3+7x_4=0 \\ 7x_1+4x_2+7x_3+10x_4=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1-3x_2+2x_3-5x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+x_3+4x_4=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ 4x_1+3x_2-5x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2+4x_3-5x_4=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+3x_2+7x_3+x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+10x_3=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 6x_1-2x_2+2x_4=0 \\ 7x_1+x_2+3x_3+3x_4=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3-x_4=0 \\ 4x_1+x_2-5x_3=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1+x_2+8x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+2x_2-3x_3-7x_4=0 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4=0 \\ x_1-5x_2+2x_3+16x_4=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+4x_4=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3-9x_4=0 \\ 4x_1+x_2+x_3-13x_4=0 \\ 5x_1-3x_2+4x_3-17x_4=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+5x_2+15x_3+10x_4=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3+6x_4=0 \\ x_1+3x_2+26x_3+17x_4=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ 4x_1-x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 20x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ -7x_2 + 7x_3 + 12x_4 = 0 \\ 3x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 13x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 10x_4 = 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 13x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + 13x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 12x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$

Problema 4: Să se demonstreze că vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ formează o bază în R^3. Să se exprime vectorul $\vec{d}$ în această bază.

1. $\vec{a}=(2,2,3)$, $\vec{b}=(1,2,3)$, $\vec{c}=(1,1,1)$, $\vec{d}=(3,0,-2)$;
2. $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(0,0,1)$, $\vec{d}=(5,6,-3)$;
3. $\vec{a}=(4,2,3)$, $\vec{b}=(1,-3,1)$, $\vec{c}=(-2,0,-2)$, $\vec{d}=(3,2,-1)$;
4. $\vec{a}=(3,2,-2)$, $\vec{b}=(3,-2,-1)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(3,2,5)$;
5. $\vec{a}=(2,2,1)$, $\vec{b}=(1,-3,1)$, $\vec{c}=(-1,0,-1)$, $\vec{d}=(3,-1,5)$;
6. $\vec{a}=(4,1,-2)$, $\vec{b}=(2,-3,0)$, $\vec{c}=(3,1,-2)$, $\vec{d}=(7,-1,-3)$;
7. $\vec{a}=(2,1,-1)$, $\vec{b}=(2,-3,0)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(6,-5,3)$;
8. $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(0,-3,0)$, $\vec{c}=(2,1,1)$, $\vec{d}=(5,-6,3)$;
9. $\vec{a}=(3,3,1)$, $\vec{b}=(2,-2,1)$, $\vec{c}=(2,1,1)$, $\vec{d}=(1,0,5)$;
10. $\vec{a}=(2,1,-1)$, $\vec{b}=(2,-3,0)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(5,-4,-2)$;
11. $\vec{a}=(-3,2,-2)$, $\vec{b}=(3,-2,-1)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(5,1,-4)$;
12. $\vec{a}=(4,1,-2)$, $\vec{b}=(2,-3,0)$, $\vec{c}=(3,1,-2)$, $\vec{d}=(3,8,-4)$;
13. $\vec{a}=(4,2,3)$, $\vec{b}=(1,-3,1)$, $\vec{c}=(2,0,-2)$, $\vec{d}=(4,-4,3)$;
14. $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-2,3,-2)$, $\vec{c}=(2,-4,-5)$, $\vec{d}=(6,20,6)$;
15. $\vec{a}=(2,2,-3)$, $\vec{b}=(1,2,-3)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(5,7,10)$;
16. $\vec{a}=(2,2,1)$, $\vec{b}=(1,3,1)$, $\vec{c}=(1,0,1)$, $\vec{d}=(-1,8,-2)$;
17. $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(3,1,-1)$, $\vec{c}=(0,3,2)$, $\vec{d}=(7,7,0)$;
18. $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(0,3,0)$, $\vec{c}=(2,1,1)$, $\vec{d}=(3,9,1)$;

19. $\vec{a}=(3,3,1)$, $\vec{b}=(2,2,1)$, $\vec{c}=(2,1,1)$, $\vec{d}=(9,0,4)$;

20. $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(4,-1,5)$, $\vec{c}=(2,-3,1)$, $\vec{d}=(8,-1,0)$;

21. $\vec{a}=(5,1,2)$, $\vec{b}=(8,2,-3)$, $\vec{c}=(-1,3,2)$, $\vec{d}=(7,1,9)$;

22. $\vec{a}=(1,3,-3)$, $\vec{b}=(-4,1,5)$, $\vec{c}=(-2,1,6)$, $\vec{d}=(-3,5,7)$;

23. $\vec{a}=(1,4,2)$, $\vec{b}=(1,-3,1)$, $\vec{c}=(-1,1,0)$, $\vec{d}=(-2,1,5)$;

24. $\vec{a}=(1,3,2)$, $\vec{b}=(2,-5,7)$, $\vec{c}=(1,3,-1)$, $\vec{d}=(4,1,8)$;

25. $\vec{a}=(1,8,-4)$, $\vec{b}=(1,3,-1)$, $\vec{c}=(-1,-6,3)$, $\vec{d}=(1,2,-3)$;

26. $\vec{a}=(4,2,5)$, $\vec{b}=(-3,5,6)$, $\vec{c}=(2,-3,-2)$, $\vec{d}=(9,4,18)$;

27. $\vec{a}=(2,2,1)$, $\vec{b}=(1,3,1)$, $\vec{c}=(-1,0,-1)$, $\vec{d}=(3,-1,5)$;

28. $\vec{a}=(1,3,5)$, $\vec{b}=(0,2,0)$, $\vec{c}=(5,7,9)$, $\vec{d}=(0,4,16)$;

29. $\vec{a}=(1,2,-3)$, $\vec{b}=(2,2,-3)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(5,7,10)$;

30. $\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(2,1,1)$, $\vec{c}=(0,1,1)$, $\vec{d}=(3,5,1)$;

Problema 5. Fie punctele A_1, A_2, A_3 şi A_4 în spaţiu.

a) Să se arate că aceste puncte nu aparţin unui plan;

b) Să se afle proiecţia vectorului $\vec{A_1A_2}$ pe vectorul $\vec{A_1A_3}$;

c) Să se alcătuiască ecuaţiile generală şi normală ale planului $A_1A_2A_3$;

d) Să se calculeze unghiul $\angle A_2A_1A_3$ şi unghiul dintre muchia A_1A_4 şi faţa $A_1A_2A_3$;

e) Să se afle aria $\Delta A_1A_2A_3$ şi volumul piramidei $A_1A_2A_3A_4$;

f) Să se afle ecuaţia înălţimii coborâte din punctul A_4 pe planul $A_1A_2A_3$;

g) Să se determine ecuaţiile canonică, parametrică şi generală ale dreptei A_2A_4.

1. $A_1(1, -3, 1)$, $A_2(-3, 2, -3)$, $A_3(-3, -3, 3)$, $A_4(-2, 0, -4)$.
2. $A_1(1, -1, 6)$, $A_2(4, 5, -2)$, $A_3(-1, 3, 0)$, $A_4(6, 1, 5)$.
3. $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(3, 4, 0)$, $A_3(-1, 5, 6)$, $A_4(4, 0, 5)$.

4. $A_1(-4, 2, -1)$, $A_2(0, 6, -3)$, $A_3(-2, 13, -11)$, $A_4(4, 4, 0)$.
5. $A_1(7, 1, 2)$, $A_2(-5, 3, -2)$, $A_3(3, 3, 5)$, $A_4(4, 5, -1)$.
6. $A_1(-2, 3, -2)$, $A_2(2, -3, 2)$, $A_3(2, 2, 0)$, $A_4(1, 5, 5)$.
7. $A_1(3, 3, 1)$, $A_2(4, 4, 1)$, $A_3(1, 1, 7)$, $A_4(3, 4, -1)$.
8. $A_1(4, -3, -2)$, $A_2(2, 2, 3)$, $A_3(2, -2, 3)$, $A_4(-1, -2, 3)$.
9. $A_1(5, 1, 0)$, $A_2(7, 0, 1)$, $A_3(2, 1, 4)$, $A_4(5, 3, 3)$.
10. $A_1(4, 2, -1)$, $A_2(3, 0, 4)$, $A_3(0, 0, 4)$, $A_4(5, -1, -3)$.
11. $A_1(0, 0, 2)$, $A_2(3, 0, 5)$, $A_3(1, 1, 0)$, $A_4(4, 1, 2)$.
12. $A_1(3, 0, 5)$, $A_2(0, 0, 2)$, $A_3(4, 1, 2)$, $A_4(1, 1, 0)$.
13. $A_1(4, -2, 5)$, $A_2(8, 2, 3)$, $A_3(6, 9, -5)$, $A_4(4, 0, 6)$.
14. $A_1(-5, 0, 1)$, $A_2(-4, -2, 3)$, $A_3(3, 4, 9)$, $A_4(6, 2, 5)$.
15. $A_1(1, -4, 0)$, $A_2(2, -6, -3)$, $A_3(3, 2, 5)$, $A_4(9, 0, 8)$.
16. $A_1(1, 2, 8)$, $A_2(0, 4, 6)$, $A_3(-3, 0, 2)$, $A_4(7, 2, 0)$.
17. $A_1(3, 1, -2)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(5, 1, 3)$, $A_4(1, 6, 5)$.
18. $A_1(0, 4, 3)$, $A_2(4, 8, 1)$, $A_3(2, 15, -7)$, $A_4(0, 6, 4)$.
19. $A_1(2, -2, 1)$, $A_2(-3, 0, -5)$, $A_3(0, -2, 1)$, $A_4(-3, 4, 2)$.
20. $A_1(5, 4, 1)$, $A_2(-3, -2, -2)$, $A_3(3, -2, 2)$, $A_4(-5, 5, 4)$.
21. $A_1(3, 6, -2)$, $A_2(0, 2, -3)$, $A_3(1, -2, 0)$, $A_4(-7, 6, 6)$.
22. $A_1(2, -3, 1)$, $A_2(6, 1, -1)$, $A_3(4, 8, -9)$, $A_4(2, -1, 2)$.
23. $A_1(5, -1, 4)$, $A_2(9, 3, -6)$, $A_3(7, 10, -14)$, $A_4(5, 1, -3)$.
24. $A_1(1, -4, 0)$, $A_2(5, 0, -2)$, $A_3(3, 7, -10)$, $A_4(1, -2, 1)$.
25. $A_1(-3, 6, 2)$, $A_2(1, -2, 0)$, $A_3(-1, 5, -8)$, $A_4(-3, -4, 3)$.
26. $A_1(-1, 1, -5)$, $A_2(3, 5, -7)$, $A_3(1, 12, -15)$, $A_4(-1, 3, -4)$.
27. $A_1(0,0,0)$, $A_2(5, 2, 0)$, $A_3(1, 2, 4)$, $A_4(2, 5, 1)$.
28. $A_1(8, 3, 1)$, $A_2(-2, 1, 3)$, $A_3(3, 5, 2)$, $A_4(0, 7, 7)$.
29. $A_1(-2, -1, -2)$, $A_2(1, 3, 4)$, $A_3(2, 10, 3)$, $A_4(1, -2, -4)$.
30. $A_1(4, 0, 0)$, $A_2(-2, 1, 2)$, $A_3(1, 3, 2)$, $A_4(3, 2, 7)$.

Lucrarea de control nr. 2

Limite

Problema 1. Să se calculeze limita şirului numeric.

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-9)^2+(n+2)^3}{n^3-5n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n-1}{2}\right]$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n+1}{6}}$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-(3n-5)^2}{(3n+1)^2-5n^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2+3}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4-1}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5-n)^3+(3+n)^3}{(n+2)^2+(n+3)^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{9-n^3}\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

5. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^2+1)(n^2-3)}-\sqrt{n^4-16}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\ldots+\frac{2+2^n}{3^n}\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n+1}{3n^2+20n-1}\right)^{1-n}$

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+3}\right)^{n^2}$.

8. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+8}-\sqrt{n-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{n^3+n+1}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

9. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-\sqrt{n(n+1)}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+3}-\sqrt{3n^4+2}}{2+4+6+\ldots+2n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+7}{n-8}\right)^{\frac{n+2}{3}}$.

10. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{2+8n^3}-2n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+6+18+\ldots+2\cdot 3^{n-1}}{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-1}\right)^{n+5}$

11. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+3}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-3}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\ldots+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+2}$

12. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+5}\right)^{2n+3}$

13. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^3+2n^2+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-3)}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!+(2n)!}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-2}\right)^{n-n^3}$

14. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n-6)^3}{(n+5)^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2n-\sqrt{n(4n+3)}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+7+10+\ldots+(3n+1)}{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n+1}{5n^2+3n-1}\right)^{n+3}$

15. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}+n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+3)(n+5)}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^{n+1}-7^{n+1}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+5}\right)^{n+4}$;

16. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n+2}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2+4}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{n^4-1}\right)^{n-n^3}$

17. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(n+2)^2+(2n+3)^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{2n+3}$

18. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}+\sqrt{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+4}-\sqrt{n^4-4}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{n+1}$.

19. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-8n+5}-n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3+5-7+9-11+\ldots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2n+2}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+5}\right)^{n+4}$

20. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}+5n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3+5}\right)n\sqrt{n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2}+\sqrt[3]{n^2-2}}{2+5+8+\ldots+(3n-1)}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

21. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+2}$

22. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-4n)^3+n^2-8}{(5n+2)^3-n^2+7}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n^2+3n+5}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+2}$

23. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+2}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

24. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^2+1)(n^4+1)}-\sqrt{n^6+2}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+3}{4n-1}\right)^{n-2}$.

25. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+2n+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+3)(n+5)}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3+4}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{1+2+3+\ldots+n}-\dfrac{2}{3}\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2-3}\right)^{n^2-1}$

26. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n-2)^3}-\sqrt{n(n+1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{-n^2}$

27. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+2n+5}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^2+1)(n^2-3)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2+7)}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{\sqrt{n^4+n^2+n+1}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+5}{7n-1}\right)^{n-2}$

28. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3+\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3n^5+7}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+7)}-n\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+4)!}{(2n)!+(2n+1)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+9}{n^2-2n+1}\right)^{n^2+2}$

29. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^4-(n-3)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+\sqrt[3]{27-8n^3}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+8}{n-1}\right)^{n+2}$.

30. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n^5+1}+n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[3]{4+n^2}-\sqrt[3]{1+n^2}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+3)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+5}\right)^{5n+2}$

Problema 2. Să se calculeze limitele

1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^4+4x^2-5}$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln x\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$; e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$;

3. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg\left[\pi(2+x)\right]}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\ln\left(1+x^3\right)\right]^{\frac{3}{x^2\sin x}}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg 3x}{\sin 5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\left[\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 5x-tgx}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^5 2x}{x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x-1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{arctg\,x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$; e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 4x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}$.

7. a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+9x+10}{x^2+7x+10}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\left[\ln(x-2)-\ln(x+1)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{3\sin 3x}$.

8. a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-5x-12}$; b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{x}{x-1}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{tg^2 x}}$;

9. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-6x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{3arctgx}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)\left[\ln(2x+3)-\ln(2x-1)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-e^{arc\sin^2\sqrt{x}}\right]^{\frac{3}{x}}$.

10. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-2x^2+x-4}{x^2-3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{4x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{tg\,x}\right)^{ctg\,\pi x}$.

11. a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x\sin 5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{3}{x+1}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\ln\cos 6x}$.

12. a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^4-3x^2-2}{3x^2-6}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tg\,x$; d) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x+1}{x-2}}$; e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$.

13. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-3x-1}{3x^2+x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{tg^2 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2+5)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\ln x}-1}{1+\cos\pi x}$.

14. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-9}{2x^2-5x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x^2+1}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$.

15. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-9x-2}{2x^2-5x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}}$.

16. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x-3}{3x^2-5x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\left[\ln(3x-1)-\ln(3x+7)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{2}{\ln\left(1+x^3\right)}}$.

17. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-13x-6}{x^2-7x+12}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+1}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{tg\pi x}$;

d) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{x}{x+2}}$; e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\sin 3x}-e^{tgx}}{\ln\frac{x}{\pi}}$.

18. a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+3x+2}{2x^2+x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-1)\left[\ln(2x-3)-\ln(2x+3)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$.

19. a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-7x+10}$; b) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{\arcsin 3x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x-1}{x-3}}$; e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{3\sin x}$.

20. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-9x-9}{2x^2-7x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{\sin\left[2\pi(x+3)\right]}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\ln(4x-5)-\ln(4x+3)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$.

21. a) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{2x^2-11x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{2}\right)tg\,x}{\arcsin 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+8}(x+1)\left[\ln(2x+3)-\ln(2x+5)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{tg(\ln x)}$.

22. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-x-2}{x^3-2x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)tg\dfrac{x}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{x+4}{x+1}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

23. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+x+1}{2x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$; c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+3}\right)^{5x+7}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{arctgx-x^2}$.

24. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-9x+2}{x^2-8x+12}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x+1}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\pi x}{x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)\left[\ln(x-2)-\ln(x+5)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^2}$.

25. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{tg6x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+3}\right)^{4x+5}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-5^{arcsin\,x}\right)^{\frac{cosec^2 x}{x}}$

26. a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-11x-4}{2x^2-6x-8}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\sin 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x-1}{x-2}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{\sin 3x-\sin x}$.

27. a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+9x+10}{3x^2+5x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+5)\right]$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{2^{\sin x}-1}$.

28. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^2\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\lg x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^x}{\arcsin x+x^3}$.

29. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg3x}{1-\cos 6x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$.

30. a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}+2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^3 2x}$.

Lucrarea de control nr. 3

Derivate

Problema 1. Să se calculeze y'_x, dacă

1. a) $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$; b) $y=3^{arctg^2(4x^2+1)}$;

c) $y=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}+\ln tgx$; d) $y=(tg2x)^{\sin x}$;

e) $x^3+y^3+3xy+1=0$; f) $\begin{cases}x=t+\ln\cos t\\ y=t-\ln\sin t.\end{cases}$

2. a) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$; b) $y=\ln\dfrac{x-\sqrt{25-x^2}}{x+\sqrt{25-x^2}}$;

c) $y=\arcsin tg^2 6x$; d) $y=(\sin x)^{x^2+1}$;

e) $x^2+y^2+e^{x+y}+5=0$; f) $\begin{cases}x=2t-\sin 2t\\ y=\cos^3 t\end{cases}$

3. a) $y = arctg\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

b) $y = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$;

c) $y = e^{\arcsin\sqrt{1+x^2}}$;

d) $y = (tg2x)^{arctg\,x}$;

e) $\left(x^2+y^2\right)^2 + \sin(x+y) = 0$;

f) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 + \cos t. \end{cases}$

4. a) $y = \dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{x^2+4}}{3x^4}$;

b) $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$;

c) $y = \left(\sin x + ctg^2 3x\right)e^{-x}$;

d) $y = \left(arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^x$;

e) $x^2 + y^2 + (x-3y)^4 = 0$;

f) $\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{1}{t} \\ y = t + \dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$

5. a) $y = x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{x+2}}$;

b) $y = \ln\left(tg2x + \cos^2 3x\right)$;

c) $y = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $y = \left(\cos^2 x\right)^{x^2+2}$;

e) $xy + \cos(xy) + 1 = 0$;

f) $\begin{cases} x = t - \cos^2 t \\ y = t^2 + \sin t. \end{cases}$

6. a) $y = \sqrt[3]{3x^2} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt{5-x^2}}$;

b) $y = \cos^2\left(tg\sqrt{1-x^2}\right)$;

c) $y = \ln\left(x + \arcsin\sqrt{1-x^2}\right)$;

d) $y = (arctgx)^{\cos x}$;

e) $x^2 + y^2 + \sin(x+y) = 0$;

f) $\begin{cases} x = t + \sin^2 t \\ y = \arcsin t^2. \end{cases}$

7. a) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}}$;

b) $y = x\cdot\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x}$;

c) $y = 2^{arctg\sin x}$;

d) $y = \left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^{2x+1}$;

e) $x^2y+xy^2+e^{x+y}+0;$ f) $\begin{cases} x=t^2+2^t+1 \\ y=t^3+8^{t^2+1} \end{cases};$

8. a) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x-3}};$ b) $y=\sqrt{\cos^2 3x+\sin^3 x};$

c) $y=2^{tgx}+x\sin 2x;$ d) $y=\left(\operatorname{arctg}2x\right)^{\sqrt{x^2+1}};$

e) $\arcsin\left(x+y\right)+e^{x+y}=0;$ f) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2} \\ y=tg\sqrt{1+t^2}. \end{cases}$

9. a) $y=\cos\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2-3}{x^2+2}\right)^2};$ b) $y=\ln arctg2x+x\sin 3x;$

c) $y=3^{\sin^2 2x}+x\,tg\,x;$ d) $y=\left(tg2x\right)^{arctgx^2};$

e) $x^2+y^2+\ln\left(x+y\right)+1=0;$ f) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} \\ y=\dfrac{2-t^2}{t^2+1}. \end{cases}$

10. a) $y=\left(3x^2+\sqrt{x^2+1}-2\right)^3;$ b) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x;$

c) $y=\ln\left(x+\operatorname{tg}\sin^2 x\right);$ d) $y=\left(x+\cos^2 x\right)^{\sin x};$

e) $x\ln y+y\ln x+\ln\left(x+y\right)=0;$ f) $\begin{cases} x=ctg^2e^t \\ y=\ln tg^2e^t. \end{cases}$

11. a) $y=\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2};$ b) $y=e^{arctg\sqrt{1+\ln\left(x^2+1\right)}};$

c) $y=\dfrac{x\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin^2 x;$ d) $y=\left(\cos^2 2x\right)^{\sin^2 x};$

e) $\cos xy+x^2y^2+1=0;$ f) $\begin{cases} x=arctg2^t \\ y=\cos^2\ln 2^t. \end{cases}$

12. a) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}};$ b) $y=\dfrac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{4+x^2}};$

c) $y = tg^2\left(2^{\sqrt{\cos^3 x}}\right)$; d) $y = \left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)^{\sin x}$;

e) $\sqrt{x^2+y^2+1} + e^{x+y} = 0$; f) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1-t^2} \\ y = arctg\, e^{3t}. \end{cases}$

13. a) $y = \dfrac{x^2 arctg\left(x^2+1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; b) $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1+3tg2x}{\sin^2 x \cos x}}$;

c) $y = ctg^2\left(\sqrt{1+\sin^2 2x}\right)$; d) $y = (\sin 3x)^{\ln\left(x^2+1\right)}$;

e) $x^3 y^3 + \arcsin(xy) = 0$; f) $\begin{cases} x = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \\ y = t \cdot \sqrt[3]{t^2+1} \end{cases}$.

14. a) $y = \sqrt{1+x^2}\, arctg\, x + \dfrac{x \sin x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $y = x^2 + \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$;

c) $y = 2^{\ln \arcsin x^2}$; d) $y = \left(\ln\cos^2 x\right)^{tgx}$;

e) $x^2 + y^2 + \arccos\left(x^2+y^2\right) = 0$; f) $\begin{cases} x = t \sin^2 t \\ y = t^2 \cos^2 t. \end{cases}$

15. a) $y = \dfrac{\ln\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + x \arcsin x$; b) $y = \sqrt[4]{\left(\dfrac{x+\cos^2 x}{x^2-\sin^3 x}\right)^3}$;

c) $y = tg3^{arctg\sqrt{1+x^2}}$; d) $y = \left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)^{\sin x}$;

e) $3^{x+y} - \ln(xy) + 1 = 0$; f) $\begin{cases} x = \left(1+\sin^2 t\right)^2 \\ y = (\arcsin t)^2. \end{cases}$

16. a) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2+4\right)^2}{x^2-2}}$; b) $y = \dfrac{x\, \text{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}} - \text{tg}(\arcsin x)$;

c) $y = x^3 + \ln\sin^2 3x$; d) $y = (arctg\, x)^{x^3+2}$;

e) $\sin(xy+1) + \cos(x-y) + x = 0$; f) $\begin{cases} x = t + sht^2 \\ y = tht + \ln cht. \end{cases}$

17. a) $y=\sqrt{1+x^2}\,arctg\,x-\ln\left(x\sqrt{1+x^2}\right)$; b) $y=\cos^2\sqrt[3]{1+3^{\sin^2 x}}$;

c) $y=\left(\arcsin^2 x+2\right)e^{\ln\cos 3x}$; d) $y=\left(\sqrt{1+2x^2}\right)^{tg^2 x}$;

d) $xy+arctg^2 x+arctg^2 y=0$; f) $\begin{cases} x=t+\cos^2 t \\ y=t-\sin^3 t. \end{cases}$

18. a) $y=\left(x+\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\right)^4$; b) $y=arctg\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^3 x}}$;

c) $y=\ln\dfrac{1+3tg^2 2x}{\sqrt{1-3\sin^2 x}}$; d) $y=(arcsin\,3x)^{cos\,2x}$;

e) $x\ln\left(x^2+y^2\right)+y\cos(x+y)=0$; f) $\begin{cases} x=3tg^2 t \\ y=e^{sin^2 t}. \end{cases}$

19. a) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+x\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2+1}}$; b) $y=\dfrac{x\cdot\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;

c) $y=tg\left(3^{\sin^2 x\cos 2x}\right)$; d) $y=\left(\ln\sin x\right)^{tgx}$;

e) $x-y-\arcsin y+\arccos x=0$; f) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1-t^2} \\ y=t\arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

20. a) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+\cos^2 x}}{\sin^2 x\cos x}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+5}{\sqrt[3]{x^2+4}}}$;

c) $y=arcsin\,3^{tg^2(\sin x)}$; d) $y=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{arctgx}$;

e) $(x+y)^2+e^{x+y}=0$; f) $\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{\sin^2 t} \\ y=\arccos\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

21. a) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{x^2+3}}$; b) $y=\ln\dfrac{1+tgx}{1+\cos^2 2x}$;

c) $y=\sin 3^{arctg\,2x}$; d) $y=\left(\ln\cos x\right)^{\sin x}$;

e) $e^x + e^y + \arccos(x+y) = 0$; f) $\begin{cases} x = \ln\left(t + \sqrt{2+t^2}\right) \\ y = \cos\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

22. a) $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^2}$; b) $y = (1+\sin^2 3x)2^{\arcsin x}$;

c) $y = \ln\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$; d) $y = (arctg\,2x)^{\cos^2 x}$;

e) $2x^2y^3 + \arcsin(xy) = 0$; f) $\begin{cases} x = t - \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = t^2 + \cos^2 t. \end{cases}$

23. a) $y = \sqrt{1+x^2}\,arctg\dfrac{\sin x - \cos x}{x^2-2}$;

b) $y = \sqrt[3]{4+x^2}\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

c) $y = cos^2\, e^{tg^2\, ln(x^2+3)}$; d) $y = (1+x^2)^{\sin^2 x}$;

e) $x\cos y + y\sin x - 5 = 0$; f) $\begin{cases} x = t^2 + \sqrt{1+t^2} \\ y = \arcsin\sqrt{1-4t^2}. \end{cases}$

24. a) $y = tg\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$; b) $y = \ln tg\sqrt[3]{1+\cos^2 e^{5x}}$;

c) $y = 3^{\arcsin^2\sqrt{1+x^2}}$; d) $y = (\sin^2 2x)^{x^2+1}$;

e) $x + y - arctg(x+y) = 0$; f) $\begin{cases} x = t + \cos^2\sqrt{1-t^2} \\ y = t^2 - \ln\sqrt{1+t^2}. \end{cases}$

25. a) $y = \dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{x+\sqrt{x^2-4}}$; b) $y = \dfrac{\cos^2(arctgx)}{\sin^2 e^{3x}}$;

c) $y = x^2 + 3tg^2\sqrt{1+x^2}$; d) $y = (1+tg\,3x)^{\sin^2 x}$;

e) $e^{x+y} + arctg(x+y) = 0$; f) $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2 \\ y = t + \ln\sqrt{t^2-1}. \end{cases}$

26. a) $y=\sqrt[5]{\left(x+\sqrt{\arcsin x}\right)^2}$;

b) $y=\dfrac{\ln\left(ctgx+tg^2 3x\right)}{\sin x\cos^2 x}$;

c) $y=arctg3^{\sqrt{1+tg\,3x}}$;

d) $y=\left(\cos 3x\right)^{\arcsin x}$;

e) $tg\left(x+y\right)+\sin\left(x^2 y\right)=0$;

f) $\begin{cases} x=t+\sqrt[3]{t^2+4} \\ y=t^2\sqrt{t^2+3}. \end{cases}$

27. a) $y=\cos\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$;

b) $y=\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

c) $y=e^{tg\left(\ln\left(x^2-1\right)\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+x^2}}$;

d) $y=\left(1+x^3\right)^{\cos^2 x}$;

e) $arctgxy+e^{x+y}\cos\left(x^2+y\right)=0$;

f) $\begin{cases} x=\ln\cos t-\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\sqrt[3]{\sin^2 t}. \end{cases}$

28. a) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

b) $y=2^x arctg\dfrac{x+2}{1-x}$;

c) $y=5^{\arccos\sqrt[3]{1+x^2}}$;

d) $y=\left(\sin x\right)^{tg^2 x}$;

e) $x\sin y-\cos y+tg2y=0$;

f) $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^2 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y=\dfrac{\sin^2 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

29. a) $y=arctg\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$;

b) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{1+x^2}+\dfrac{e^x+\sin x}{xe^x}$;

c) $y=\ln\left(\sin x\right)+\dfrac{1}{2\sin x}$;

d) $y=\left(x+1\right)^{\frac{2}{x}}$;

e) $2^{x+y}+\cos\left(xy\right)=0$;

f) $\begin{cases} x=t\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{t}+1\right) \\ y=\sqrt{t}\cdot e^{\sqrt{t}}. \end{cases}$

30. a) $y=\ln\sqrt[5]{\left(\dfrac{3-x^2}{3+x^2}\right)^3}$;

b) $y=\arccos\left(2x\right)+\sqrt{1-4x^2}$;

c) $y = 2^{tgx} + x\sin 2x$; d) $y = (arctg2x)^{\sqrt{x^2+1}}$;

e) $\arcsin(x+y) + e^{x+y} = 0$; f) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = tg\sqrt{1+t^2} \end{cases}$.

Problema 2. Să se calculeze derivata funcției de ordinul indicat.

1. a) $y = \frac{1}{x^2}\log_3 x, y^{IV} = ?$; b) $x = \ln t, y = \text{arctg}t, y''_x = ?$.
2. a) $y = (x^3+2)e^{4x+3}, y^{IV} = ?$; b) $x = cost + sint, y = sin2t, y''_x = ?$.
3. a) $y = (5x-1)\ln^2 x, y^{III} = ?$; b) $x = \sqrt{1+t^2}, y = \frac{1}{t}, y''_x = ?$.
4. a) $y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}, y^V = ?$; b) $x = sh^2 t, y = \frac{1}{ch^2 t}, y''_x = ?$.
5. a) $y = (5x+8)2^{-x}, y^{IV} = ?$; b) $x = t + \sin t, y = 2 - \cos t, y''_x = ?$.
6. a) $y = (x+7)\ln(x+3), y^V = ?$; b) $x = sht, y = th^2 t, y''_x = ?$.
7. a) $y = e^{-x}(\cos 2x + 3\sin 2x), y^{IV} = ?$;
   b) $x = \sqrt{t+3}, y = \ln(t+2), y''_x = ?$.
8. a) $y = x^2\sin(5x+1), y^{III} = ?$; b) $x = t + \sin t, y = 2 + \cos t, y''_x = ?$.
9. a) $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}, y^{III} = ?$; b) $x = \sin t, y = \ln\cos t, y''_x = ?$.
10. a) $y = x\ln(1+3x), y^{IV} = ?$; b) $x = cht, y = \sqrt[3]{sh^2 t}, y''_x = ?$.
11. a) $y = e^{\frac{x}{2}}\sin 2x, y^{IV} = ?$; b) $x = 2(t - \sin t), y = 4(2 + \cos t), y''_x = ?$.
12. a) $y = (2x^3+1)\cos x, y^{IV} = ?$; b) $x = \sqrt{t+1}, y = \frac{t}{\sqrt{t+1}}, y''_x = ?$.
13. a) $y = (1+x^2)arctgx, y^{III} = ?$; b) $x = \cos t, y = \sin^4\left(\frac{t}{2}\right), y''_x = ?$.
14. a) $y = (2x^2+5)\ln(x+1), y^{IV} = ?$; b) $x = e^t, y = \arcsin t, y''_x = ?$.

15. a) $y = e^{-x}\sin(1+2x)$, $y^{IV} = ?$;

b) $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $y''_x = ?$.

16. a) $y = xe^{x^2}$, $y^{V} = ?$; b) $x = ctg\, t$, $y = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $y''_x = ?$.

17.a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y^{IV} = ?$; b) $x = 2\cos^3 2t$, $y = \sin^3 2t$, $y''_x = ?$.

18. a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$, $y^{III} = ?$; b) $x = \dfrac{2-t}{2+t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{2+t^2}$, $y''_x = ?$.

19.a) $y = (x^2+1)e^{x^2}$, $y^{III} = ?$; b) $x = arcsin(t^2-1)$, $y = arccos 2t$, $y''_x = ?$.

20. a) $y = xe^{\frac{1}{x}}$, $y^{IV} = ?$; b) $x = t + \ln t$, $y = t - \ln t$, $y''_x = ?$.

21. a) $y = \sin 2x + \cos(x+1)$, $y^{IV} = ?$;

b) $x = \ln\cos 2t$, $y = \sin^2 2t$, $y''_x = ?$.

22. a) $y = \dfrac{x}{x+1}$, $y^{V} = ?$; b) $x = \dfrac{1-t}{t^2}$, $y = \dfrac{1+t}{t^2}$, $y''_x = ?$.

23. a) $y = \lg(3x+1)$, $y^{IV} = ?$; b) $x = 4 - e^{3t}$, $y = \dfrac{3}{e^{3t}+1}$, $y''_x = ?$.

24. a) $y = 3^{2x+7}$, $y^{V} = ?$; b) $x = \dfrac{\sin t}{1+\sin t}$, $y = \dfrac{\cos t}{1+\sin t}$, $y''_x = ?$.

25. a) $y = \dfrac{7x+1}{4x+3}$, $y^{IV} = ?$; b) $x = t - arctgt$, $y = \ln(1+t^2)$, $y''_x = ?$.

26. a) $y = \sin(x+1) + \cos 2x$, $y^{IV} = ?$;

b) $x = \dfrac{1+t}{t^2}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}$, $y''_x = ?$.

27. a) $y = \sqrt{x}$, $y^{V} = ?$;

b) $x = t(t\cos t - 2\sin t)$, $y = t(t\sin t + 2\cos t)$, $y''_x = ?$.

28. a) $y = \lg(x+4)$, $y^{V} = ?$;

b) $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y''_x = ?$.

29. a) $y = arctgx^2$, $y^{III} = ?$;

b) $x = 2\sin^2 t$, $y = 4\cos^2 t$, $y''_x = ?$.

30. a) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, y'''=?;$

b) $x=\ln\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}, y=\frac{1}{2}tg^2t+\ln\cos t, y_x''=?.$

Lucrarea de control nr. 4

Integrale

Problema 1. Să se calculeze integralele:

1. a) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}};$ b) $\int x^3\operatorname{arctg}x dx;$

c) $\int\frac{x^4dx}{x^4-5x^2+4};$ d) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}};$

2. a) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx;$ b) $\int e^{2x}\sin x dx;$

c) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2}};$ d) $\int\frac{dx}{4\sin x+8\cos x+5};$

3. a) $\int\frac{3x^2+2x+5}{x^3+x^2+x+1}dx;$ b) $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x};$

c) $\int\left(x\sqrt{3}-2\right)\sin 2x dx;$ d) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x^2};$

4. a) $\int\frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}dx;$ b) $\int\frac{2-\cos x}{2+\cos x}dx;$

c) $\int(2x+3)\cos 4x dx;$ d) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}+1};$

5. a) $\int\frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2x+1}dx;$ b) $\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx;$

c) $\int(2+3x)\sin 2x dx;$ d) $\int\frac{1+\sqrt{x^2-9}}{x}dx;$

6. a) $\int \frac{3x^2-6x+2}{x^3-2x^2+x}dx;$ b) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx;$

c) $\int (4+3x)e^{-2x}dx;$ d) $\int \frac{x^3dx}{1-\sqrt{x^2+1}};$

7. a) $\int \frac{x^3+4x^2+5x-2}{x^3-1}dx;$ b) $\int \frac{2\cos x-5\sin x}{3\cos x+4\sin x}dx;$

c) $\int (5x+2)e^{3x}dx;$ d) $\int \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}dx;$

8. a) $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^3+1)}dx;$ b) $\int \frac{dx}{\sin x+\sqrt{3}\cos x};$

c) $\int e^{-3x}(4x+1)dx;$ d) $\int \frac{2+\sqrt{1-x^2}}{x}dx;$

9. a) $\int \frac{2x^2+4x-1}{x^2+2x+2}dx;$ b) $\int \frac{\sec x}{1+\sin x}dx;$

c) $\int e^{-3x}x^2dx;$ d) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx;$

10. a) $\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx;$ b) $\int \frac{\cos ecx}{3+4tgx}dx;$

c) $\int e^{-x}\cos xdx;$ d) $\int \frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}+x}dx;$

11. a) $\int \frac{2x^3+7x^2+4x-3}{x^3+3x^2}dx;$ b) $\int \frac{\sec x}{3+5\cos x}dx;$

c) $\int (4x+3)\sin 5xdx;$ d) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx;$

12. a) $\int \frac{5x^2-4x+4}{(x^2-4)^2}dx;$ b) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+3\sin^2 x};$

c) $\int \ln(3x^2+4)dx;$ d) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}dx;$

13. a) $\int \frac{2x^4 - x^3 + 5}{x^2(x^2+1)}dx$;

b) $\int \frac{\sec x}{1-\sec^2 x}dx$;

c) $\int \ln(7x^2+1)dx$;

d) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

14. a) $\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 1}{x(x^2+x+1)}dx$;

b) $\int \frac{\sec x}{1-4\sec^2 x}dx$;

c) $\int (4x-7)\sin 2x dx$;

d) $\int \frac{x-1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

15. a) $\int \frac{2x^3 + x}{x^2 - x + 1}dx$;

b) $\int \sin^3 x dx$;

c) $\int (2x+9)\cos 4x dx$;

d) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x-1}dx$;

16. a) $\int \frac{4x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 4x}{(x+1)^3}dx$;

b) $\int \sin^4 x dx$;

c) $\int \frac{4x dx}{\cos^2 x}$;

d) $\int \frac{x-2}{\sqrt{1-4x+x^2}}dx$;

17. a) $\int \frac{x^2 + x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}dx$;

b) $\int \sin^5 x dx$;

c) $\int \frac{7x dx}{\sin^2 x}dx$;

d) $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}dx$;

18. a) $\int \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 2}dx$;

b) $\int \cos^5 x dx$;

c) $\int (2x+5)\sin 4x dx$;

d) $\int \frac{2x + \frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2+1}}dx$;

19. a) $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{(x+1)^3}dx$;

b) $\int tg^3 x dx$;

c) $\int (4x-7)\cos 2x dx$;

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

20. a) $\int \frac{x^3+4x^2+7x+12}{(x^2-9)(x^2+x)}dx;$ b) $\int tg^5 x dx;$

c) $\int (2-3x)\sin 2x dx;$ d) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x-x^2}}dx;$

21. a) $\int \frac{1-4x+8x^2-8x^3}{x(x^2-2x+1)}dx;$ b) $\int \sec^6 x dx;$

c) $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt{9+x^2}}dx;$ d) $\int \frac{xdx}{tg^2 x};$

22. a) $\int \frac{4x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx;$ b) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx;$

c) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx;$ d) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}};$

23. a) $\int \frac{-6x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)(x^2-x+1)}dx;$ b) $\int \frac{dx}{1+\cos x};$

c) $\int \left(\frac{x}{2}+6\right)\cos 2x dx;$ d) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx;$

24. a) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx;$ b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+tg^2 x};$

c) $\int (\sqrt{2}-3x)\sin 3x dx;$ d) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+3x+4}}dx;$

25. a) $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2+x+1)(x^2-1)}dx;$ b) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx;$

c) $\int x\sin^2 x dx;$ d) $\int \frac{1+\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx;$

26. a) $\int \frac{x^3+2x^2+1}{(x^2+1)(x-1)}dx;$ b) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx;$

c) $\int x^3 e^{-x^2} dx$; d) $\int \frac{3+\sqrt{x^2-4}}{x} dx$;

27. a) $\int \frac{(2x^2-3x)x}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$; b) $\int x^2 \cos x dx$;

c) $\int \frac{x^3 dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}$; d) $\int ctg^4 x dx$;

28. a) $\int \frac{dx}{4+\sin x}$; b) $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$;

c) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+4x+4}$; d) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

29. a) $\int \frac{(x^3+2)dx}{x^3+3x^2+2x}$; b) $\int x^2 \cos^2 x dx$;

c) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$; d) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$;

30. a) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+x^2-2}$; b) $\int \frac{xdx}{ctg^2 x}$;

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; d) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$.

Problema 2.

1. Să se calculeze aria figurii mărginită de liniile $y^2 = 3x$ şi $x^2 = 3y$.

2. Să se calculeze lungimea arcului mărginit de curba $y = \sqrt{x^3}$, $x \in [0,5]$.

3. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie în jurul axei OX al sinusoidei $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

4. Să se determine coordonatele centrului de greutate al figurii omogene mărginită de parabola $y = 2 - x^2$ şi dreapta $y=x$.

5. Să se calculeze masa liniei (cablului) materiale mărginită de curba $y = \ln(x^2 - 1), x \in [2,5]$, dacă densitatea ei liniară este $\gamma(x) = x^2 - 1$.

6. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al liniei materiale omogene mărginită de parabola $y = -x^2 + 4x + 1$, axele *OX, OY* şi dreapta $x = 3$.

7. Să se determine masa figurii (plăcii) materiale omogene $(\gamma(x) = const = 1)$ mărginită de hiperbola $xy=2$ şi dreapta $x + 2y - 5 = 0$.

8. Să se calculeze momentul static faţă de axa *OX* al liniei materiale omogene $(\gamma(x) = const = 1)$ mărginită de curba $y = e^x + e^{-x}, x \in [0,2]$.

9. Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa *OY* al figurii materiale omogene $(\gamma(x) = const = 1)$ mărginită de parabola $y=2x^2$, axa *OX* şi dreapta $x=2$.

10. Să se calculeze aria suprafaţei laterale a corpului prin rotaţia figurii mărginită de parabola $y^2=10x$ şi dreapta $y=-x$ în jurul axei *OY*.

11. Să se calculeze aria figurii mărginită de curba polară $\rho = 3(1 + \cos\theta)$.

12. Să se calculeze lungimea arcului mărginit de curba parametrică $x = \frac{1}{3}t^6, y = 1 + \frac{1}{2}t^4, t \in [0,2]$.

13. Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei *OY* a figurii mărginită de curbele $xy=4$, $x=0$, $y=1$, $y=6$.

14. Să se calculeze aria suprafeţei laterale a corpului, obţinut prin rotaţia în jurul axei *OX* a figurii mărginită de parabola $y^2 = x + 4, x \in [-4,2]$.

15. Să se calculeze masa liniei materiale mărginită de curba $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x, x \in [1,2]$, dacă densitatea ei liniară este $\gamma(x) = x^2$.

16. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al liniei materiale omogene mărginită de curba polară $\rho = 1 + \cos\theta, \theta \in [0, \pi]$.

17. Să se calculeze masa figurii materiale omogene $(\gamma(x) = const = 1)$ mărginită de circumferința $x^2+y^2=4x$ și parabola $y^2=2x$ (partea exterioară a parabolei).

18. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al figurii materiale omogene mărginită de cicloida $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ și axa OX.

19. Să se calculeze momentul static față de axa OY al liniei materiale omogene $(\gamma(x) = const = 1)$ mărginită de astroida $x = \sin^3 t$, $y = 3\cos^3 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

20. Să se calculeze momentul de inerție față de axa OX al figurii materiale omogene $(\gamma(x) = const = 1)$ mărginită de curbele $y = \frac{4}{1+x^2}$, $y = 2x^2$.

21. Să se calculeze aria figurii mărginită de curbele $y^2=x^3$, $x=0$, $y=4$.

22. Să se calculeze lungimea arcului mărginit de curba $y = 1 - \ln\cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

23. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei OY a figurii mărginită de $y=2x-x^2$, $y=0$.

24. Să se calculeze aria suprafeței laterale a corpului obținut prin rotația în jurul axei OX a figurii mărginită de curbele $y=10x^2$, $y=0$, $x=10$.

25. Să se calculeze masa liniei materiale mărginită de curba $y = \frac{1}{6}x\sqrt{x}$, $x \in [0,4]$, dacă densitatea ei liniară este $\gamma(x) = 2x$.

26. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al liniei materiale omogene mărginită de semicircumferința $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

27. Să se calculeze masa figurii materiale mărginită de parabolele $y=\frac{1}{4}x^2+1$ şi $y=5-\frac{3}{4}x^2$, dacă densitatea ei este $\gamma=2x$.

28. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al figurii materiale omogene mărginită de parabola $y=x^2-2x$ şi dreapta $x-y+4=0$.

29. Să se calculeze momentul static faţa de axa OY al liniei materiale omogene $(\gamma(x)=const=1)$ mărginită de curba $y=\sqrt{(x+1)^3}$, $x\in[-1,3]$.

30. Să se calculeze momentul de inerţie faţa de axa OX al figurii materiale omogene $(\gamma(x)=const=1)$ mărginită de parabola $y=x^2+4x$ şi axa OX.

Problema 3. Să se calculeze integralele improprii sau să se stabilească divergenţa lor.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$;
2. $\int_0^1\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^5}}$;
3. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)dx}{x^2}$;
4. $\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}$;
5. $\int_4^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$;
6. $\int_0^1\frac{dx}{x^3-5x^2}$;
7. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;
8. $\int_2^3\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$;
9. $\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$;
10. $\int_0^2\frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$;
11. $\int_{-\infty}^0\frac{x+1}{x^2+1}dx$;
12. $\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$;
13. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-3x+9}$;
14. $\int_0^2\frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$;
15. $\int_0^{+\infty}x\cdot 3^{-x}dx$;
16. $\int_0^3\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$;
17. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$;
18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;
19. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$;
20. $\int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$;
21. $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{9x^2+1}$;
22. $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;
23. $\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$;
24. $\int_0^2\frac{dx}{4-x^2}$;

25. $\int_{3}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; 26. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$; 27. $\int_{0}^{+\infty} e^x \cos x dx$;

28. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+x^3}$; 29. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1+4x}{x(x^2+1)}dx$; 30. $\int_{0}^{1} \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}dx$.

Lucrarea de control nr.5

Funcţii de mai multe variabile

Problema 1.

1. Să se arate că $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$, dacă $z = e^{xy}$.
2. Să se demonstreze că $4z''_{yy} = z''_{xx}$, dacă $z = e^{-\cos(2x+y)}$.
3. Fie $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$. Să se arate că $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.
4. Să se arate că funcţia $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface ecuaţia $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$.
5. Să se demonstreze că $4z''_{yy} = z''_{xx}$, dacă $z = \sin^2(y - 2x)$.
6. Fie $z = \frac{y}{x}$. Să se arate că $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0$.
7. Fie $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$. Să se demonstreze că $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$.
8. Să se arate că funcţia $z = \varphi(xy) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface ecuaţia $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$.
9. Fie $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$. Să se demonstreze că $x^2 z''_{xx} - \left(y^2 z'_y\right)'_y = 0$.
10. Fie $z = \frac{\sin(x-y)}{x}$. Să se arate că $\left(x^2 \cdot z'_x\right)'_x = x^2 \cdot z''_{yy}$.
11. Să se demonstreze că $\left(x^2 \cdot z'_x\right)'_x = y^2 \cdot z''_{yy}$, dacă $z = e^{\frac{y}{x}}$.

12. Să se arate că $z''_{xx} = 4z''_{yy}$, dacă $z = \dfrac{y}{y^2 - 4x^2}$.

13. Să se demonstreze că $xz''_{xy} + yz''_{yy} + z'_y = 1$, dacă

$z = x + y + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$.

14. Fie $z = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x - y\right)$. Să se arate că

$x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = x^2 + y^2$.

15. Să se arate că $z = \left(x^3 + \sqrt[5]{x}\right)\ln\left(y^2 + 1\right)$ verifică ecuația

$z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y$.

16. Fie $z = \sin^2(2x+1) + 2y\sin 2(2x+1)$. Să se demonstreze că

$z'_x = z'_y + y \cdot z''_{xy}$.

17. Să se verifice că $z''_{yy} = a^2 z''_{xx}$, dacă $z = \dfrac{1}{\sqrt{x - ay}} + \sqrt[3]{(x+ay)^2}$.

18. Fie $z = \ln(ax + by)$. Să se arate că $xz''_{xx} + yz''_{xy} + x'_x = 0$.

19. Fie $z = 2\cos^2\left(x - \dfrac{y}{2}\right)$. Să se demonstreze că $2z''_{yy} + z''_{xy} = 0$.

20. Să se arate că funcția $z = e^{\frac{x}{y}}$ verifică ecuația $yz''_{xy} = z'_y - z'_x$.

21. Fie $z = \dfrac{xy}{x - y}$. Să se arate că $z''_{xy} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = \dfrac{2}{x - y}$.

22. Să se demonstreze că funcția $u = \dfrac{x}{y} f(x) + \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ verifică

ecuația $xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} + xu'_x + 2yu'_y = 0$.

23. Fie $z = arctg\dfrac{y}{x}$. Să se demonstreze că $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

24. Să se arate că $xz''_{xy} + yz''_{yy} = 0$, dacă $z = x \cdot f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

25. Să se arate că $x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{z}$, dacă funcția $z = f(x, y)$ este definită implicit de ecuația $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$.

26. Să se arate că funcția $z = y \ln(x^2 - y^2)$ satisface ecuația $xz''_{xx} + yz''_{xy} = 0$.

27. Fie $z = y \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)$. Să se arate că $x^2 z''_{xx} = y^2 z''_{yy}$.

28. Să se arate că $x^3 z''_{xx} + y^3 z''_{yy} + x^2 y z''_{xy} = x^2$, dacă $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

29. Fie $z = e^{x^2 + y^2}$. Să se arate că $2xyz''_{xx} - (1 + 2x^2) z''_{xy} = 0$.

30. Să se demonstreze că funcția $z = arctg \frac{y}{1 + x^2}$ satisface ecuația $\frac{1}{2xy} z'_x + \frac{1}{1 + x^2} z'_y = 0$.

Problema 2. Să se calculeze derivata funcției $u = f(x, y, z)$ în punctul $A(x_1, y_1, z_1)$ în direcția vectorului $\vec{a}$.

1. $u = x^2 y^3 z^4$, $A(1, 1, -1)$, $\vec{a} = \{2, 2, 1\}$.

2. $u = tgx - sin^3 y + ctgz$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{a} = \overrightarrow{gradu}(A)$.

3. $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$, $A(1, 1, 1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(2, 0, -1)$.

4. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $A(1, -1, 0)$, $\vec{a} = \{2, 3, 4\}$.

5. $u = \ln \frac{xy}{z}$, $A(2, 1, 1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(3, -1, 4)$.

6. $u = \text{arctg}(xy) + arcsin(xz)$, $A(1, 1, 0)$, $\vec{a} = \overrightarrow{gradu}(A)$.

7. $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$, $A(1,-1,-1)$, $\vec{a} = \{3,4,5\}$.

8. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(2,-2,2)$.

9. $u = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a} = \{1,-1,2\}$.

10. $u = 2x^2 + xy + xz + yz$, $A(1,0,3)$, $\vec{a} = \overrightarrow{gradu}(A)$.

11. $u = x^3 + y^3 + z^2 + 12xy + 2z$, $A(3,1,-2)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(3,1,-2)$.

12. $u = \left(x + y^2\right) \cdot e^{x\left(y^2+z^2-1\right)}$, $A(1,1,0)$, $\vec{a} = \{1,3,5\}$.

13. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xz + 2y$, $A(3,4,5)$, $\vec{a} = \overrightarrow{gradu}(A)$.

14. $u = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{z^2} - 6y + 5xz$, $A(1,-1,-2)$, $\vec{a} = \{1,2,3\}$.

15. $u = x + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 2xyz$, $A(1,3,-1)$, $\vec{a} = \{-1,1,2\}$.

16. $u = x^3 + z^3 + 4x^2y + 3xz^2$, $A(0,2,-1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{gradu}(A)$.

17. $u = sin(x+y) + cos(x+z)$, $A\left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\vec{a} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$.

18.

$u = ln\left(3x^2 + 2y^3 + 7z\right)$, $A(-1,2,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(2,3,-1)$.

19. $u = z^2 + arcsin\frac{x}{\sqrt{y}}$, $A(1,4,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{gradu}(A)$.

20. $u = arctg\frac{x^3 z}{y}$, $A(-2,4,1)$, $\vec{a} = \{4,3,1\}$.

21. $u = \frac{x-y+z}{x+y-z}$, $A(4,3,1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ cu $B(5,2,1)$.

22. $u=\dfrac{4}{x^2+y^2+z^2}$, $A(-2,2,2)$, $\vec{a}=\{1,-1,-1\}$.

23. $u=ln(3x-2y+z^2)$, $A(2,1,1)$, $\vec{a}=\{2,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

24. $u=x^3y+xy^3+yz^3$, $A(1,3,1)$, $\vec{a}\ gradu(A)$.

25. $u=5x^2y+3xy^2+yz^2$, $A(1,1,-1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(-1,1,2)$.

26. $u=2x^2+xy+yz+z+1$, $A(-1,2,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{gradu}(A)$.

27. $u=\dfrac{xy}{z^3}$, $A(3,4,2)$, $\vec{a}=\{1,2,3\}$.

28. $u=arctg(xyz^2)$, $A(2,3,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *cu* $B(1,2,-1)$.

29. $u=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+z^2}$, $A(1,1,\sqrt{2})$, $\vec{a}=\{1,2,-1\}$.

30. $u=ln(2x+3y+4xz)$, $A(1,-1,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{gradu}(A)$.

Problema 3. Să se calculeze valoarea cea mai mare şi valoarea cea mai mică a funcţiei $z=f(x,y)$ pe domeniul închis şi mărginit.

1. $z=x^2-xy+y^2-4x$ în triunghiul mărginit de dreptele $x=0,\ y=0,\ 2x+3y-12=0$.
2. $z=x^2-3xy+y^2-2x$ în pătratul $0\le x\le 4, 0\le y\le 4$.
3. $z=x^3+y^3-3xy$ în dreptunghiul $0\le x\le 2, 0\le y\le 3$.
4. $z=\dfrac{1}{2}x^2-xy$ în domeniul mărginit de parabola $y=\dfrac{1}{3}x^2$ şi dreapta $y=3$.
5. $z=x^2+2xy-y^2-4x$ în triunghiul mărginit de dreptele $y=x+1,\ y=0,\ x=3$.
6. $z=2x+y-xy$ în pătratul $1\le x\le 3, 0\le y\le 2$.

7. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ în dreptunghiul mărginit de dreptele $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2.$

8. $z = x^2 - 2y^2 + 4$ în domeniul mărginit de semicircumferința $y = \sqrt{4 - x^2}$ și axa $OX.$

9. $y = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$ în triunghiul mărginit de dreptele $x + y = 1,\ x = -1,\ y = -1.$

10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ în dreptunghiul mărginit de dreptele $y = 1,\ y = -1,\ x = 0,\ x = 3.$

11. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ în pătratul mărginit de dreptele $x=1,$ $x=3,\ y=2,\ y=4.$

12. $z=x^2-xy-2$ în domeniul mărginit de parabola $y=4x^2-4$ și axa $OX.$

13. $z=x^2+3y^2+x-y$ în triunghiul mărginit de dreptele $x=1,$ $y=1,\ x+y=1.$

14. $z=2x+y-xz+1$ în pătratul $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4.$

15. $z=5x^2-3xy+y+x+4,$ în dreptuinghiul $0 \le x \le 1, 1 \le y \le 3.$

16. $z=x^2+y^2+x+1$ în domeniul mărginit de circumferința $x^2+y^2=4x.$

17. $z=x^2+2xy-y^2+5x+3$ în triunghiul mărginit de dreptele $x+y=1,\ y=0,\ x=-3.$

18. $z=5x^2-2xy+3y^2+2x$ în pătratul $1 \le x \le 4, 0 \le y \le 3.$

19. $z=x^2+xy-3y^2+y+1,$ în dreptunghiul $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3.$

20. $z=x^2+3xy+x+2y-1$ în domeniul mărginit de curbele $y=2x^2,$ $y=8.$

21. $z=3x+2y-xy$ în triunghiul mărginit de dreptele $y=x,\ x=3,$ $y=0.$

22. $z=xy-2x-y-2,$ în dreptunghiul $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 4.$

23. $z = 2x + 3y - xy + x^2$ în pătratul $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$

24. $z = 4 - 2x - y^2$ în cercul $x^2 + y^2 \le 4x.$

25. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2x$ în triunghiul mărginit de dreptele $y = x + 2,\ x = 2,\ y = 0.$

26. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + x + y + 2$ în dreptunghiul $1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 5$.

27. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$ în pătratul $1 \le x \le 3, 2 \le y \le 4$.

28. $z = x^2 + 2xy - 10y$ în domeniul mărginit de circumferința $x^2 + y^2 = 2y$.

29. $z = 3x - xy + y^2 - 2$ în triunghiul mărginit de dreptele $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.

30. $z = x^2 + 6y^2 + 5xy + 4$ în domeniul mărginit de parabola $y = 2 - x^2$ și axa OX.

Bibliografie

1. Piscunov N., *Calcul diferenţial şi integral*, Vol. 1 şi 2, Chişinău, 1991, 1992.
2. Şipaciov V., *Matematica superioară*, Chişinău, 1992.
3. Roşculeţ M., *Analiză matematică*, Bucureşti, 1979.
4. Craiu M., Roşculeţ M. *Culegere de probleme de analiză matematică*, Bucureşti, 1976.
5. Chiruţă S., *Probleme de matematici superioare*, Bucureşti, 1989.
6. Ignatieva A., Krasnosciokova T., Smirnov V. *Curs de matematică superioară*, Chişinău, 1971.
7. Smirnov I., *Curs de matematici superioare*, Vol. 1–4, Editura tehnică, Bucureşti, 1953–1956.
8. Kada Allab, *Elements d'Analise*, OPU, Alger, 1984.
9. Demidovitch B., *Recueil d'exercices et problèmes d'analyse matématique*, Moscou, 1970.
10. Doneddu A., *Cours de mathématiques supérieurs*, Vol. 2, 4, 5, Paris, 1977.
11. Bass J., *Exercices de Mathématiques*, Paris, 1968.
12. Calvo A., Calvo B. *Exercices d'Analyse*, Paris, 1971.
13. Rivaud J., *Exercices d'Analyse*, Tome 1 et 2, Paris, 1965.
14. Tringan J., *Exercices d'Analyse*, Paris, 1974.
15. Кудрявцев Л., *Курс математического анализа*, Т. 1, 2, Москва, 1981.
16. Марон И., *Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах*, Москва, 1970.
17. *Сборник задач по математике для ВТУЗ-ов*, под редакцией Ефимова А. и Демидовича Б., Т. 1, 2, Москва, 1981, 1986.
18. *Руководство к решению задач по высшей математике*, Под редакцией Гурского Е., Ч. I и II, Минск, 1989, 1990.
19. Кудрявцев Л., Кутасов А. и др., *Сборник задач по мат-анализу (предел, непрерывность, дифференцируемость)*, Москва, 1984.
20. Кудрявцев Л., Кутасов А. и др., *Сборник задач по мат-анализу (интегралы, ряды)*, Москва, 1986.
21. *Сборник задач по курсу высшей математике*, под редакцией Кручковича Г., Москва, 1973.
22. Кузнецов Л., *Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты*, Москва, 1983.

23. *Сборник индивидуальных заданий по высшей математике,* под редакцией Рябушко А., Ч. 1, 2, 3, Минск, 1990, 1991.
24. Данко П., Попов А., Кожевникова Т., *Высшая математика в упражнениях и задачах*, Ч. 1, 2, Москва, 1986.
25. Каплан И., *Практические занятия по высшей математике*, Части 1-3, Харьков, 1965.
26. *Задачник по курсу математического анализа,* под редакцией Виленкина Н., в двух частях, Москва, 1971.
27. Берман Г., *Сборник задач по курсу математического анализа*, Москва, 1985.
28. Минорский В., *Сборник задач по высшей математике*, Москва, 1987.
29. Подольский В., Суходский А. *Сборник задач по высшей математике*, Москва, 1974.
30. Шмелев П., *Теория рядов в задачах и упражнениях*, Москва, 1983.
31. Лихолетов И., Мацкевич И., *Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике*, Минск, 1976.
32. Морару Н. и др. "Задания к РГР по высшей математике для студентов первого курса", Кишинёв, 1982ю
33. Краснов и др., *Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости*, Москва, 1971.
34. Жевержиев В.Ф. и др., *Специальный курс высшей математики для ВТУЗ-ов*, Москва, 1970.
35. Романовский П. И., *"Ряды Фурье". Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа*, Москва, 1980.
36. Mariana Coroi-Nedelcu, *Matematici speciale*, Partea 1, Bucureşti, 1974.
37. P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză matema-tică (funcţii complexe)*, Bucureşti, 1982.
38. *Variables complexes (curs et problemes)*, OPU, Alger, 1983.
39. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. *Сборник задач по теории функции комплексного переменного*, Москва, 1970.
40. Ion C. Şcerbaţchi, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Chişinău, 1996.

CUPRINS

Capitolul 1. Introducere în analiza matematică 5
§1. Funcţie reală de o variabilă reală 5
§2. Şiruri numerice 14
§3. Limita funcţiei 27
§4. Funcţii continue 46
§5. Compararea funcţiilor infinit mari şi infinit mici 52

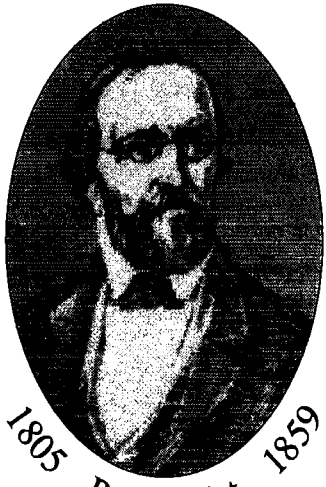
Capitolul 2. Calculul diferenţial al funcţiei de o variabilă reală 61
§1. Derivata funcţiei 61
§2. Diferenţiala funcţiei 78
§3. Teoreme despre funcţii derivabile. Formula Taylor 82
§4. Regula l'Hospital 87
§5. Extremele funcţiei 92
§6. Concavitate şi convexitate. Asimptote 101
§7. Studiul funcţiei şi construirea graficului ei 105

Capitolul 3. Numere complexe. Polinoame 109
§1. Numere complexe 109
§2. Polinoame. Funcţii raţionale 116

Capitolul 4. Calculul integral al funcţiei de o singură variabilă reală 122
§1. Integrala nedefinită 122
§2. Integrala definită 140
§3. Integrale improprii 149
§4. Aplicaţiile integralei definite 159

Capitolul 5. Calculul diferenţial al funcţiei de mai multe variabile reale 176
§1. Funcţii de mai multe variabile. Limita şi continuitatea 176
§2. Derivate parţiale. Diferenţiale 183
§3. Extremele funcţiei de mai multe variabile 197

Indicaţii şi răspunsuri 210
Anexă 264
Bibliografie 306



1805 P. Dirichlet 1859

1815 C. Weierstrass 1897

1819 D. Stokes 1903

1826 B. Riemann 1886

1858 P. Peano 1932

1777 C. Gauss 1855

1789 O. Cauchy 1857

1781 B. Bolzano 1848

1802 H. Abel 1829

1802 M. Ostrogradski 1862

Ion C. Şcerbaţchi activează pe tărîmul pedagogic în instituţiile superioare de învăţământ ale republicii peste 30 ani, dintre care mai mult de 25 ani la Universitatea Tehnică a Moldovei.

Este absolvent al Institutului Pedagogic de Stat din Tiraspol(1963),doctor în ştiinţe fizico-matematice (1971), conferenţiar al catedrei «Matematică superioară 1» a Universităţii Tehnice a Moldovei (1978).

Autor a peste 30 articole ştiinţifice, ştiinţifico-didactice şi a 5 cursuri universitare. Remarcăm unele din ele: «Analyse numérique», OPU, Alger, 1988; «Eléments de la géométrie analytique et d'algèbre supérieure», U.T.M., Chişinău, 1992; «Culegere de probleme de analiză matematică», EUS, Chişinău, 1996; «Introduction à l'analyse mathématique», U.T.M., Chişinău, 1997.

A activat mai mulţi ani în străinătate: a ţinut prelegeri la Institutul Naţional de Industrie Uşoară din Bumerdes (1974) şi la Universitatea din Sidi Bel Abbes (1985) ale Republicii Algeria.